МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ КЛАССИЧЕСКОЙ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Часть I

Учебно-методическое пособие

Составитель
Я. А. Израилевич

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

Утверждено научно-методическим советом математического факультета 23 марта 2017 г., протокол № 0500-03

Рецензент – кандидат физико-математических наук Н. М. Близняков

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендовано студентам бакалавриата и магистратуры математического факультета. Для направлений 02.03.01 – Математика и компьютерные науки (бакалавриат), 02.04.01 – Математика и компьютерные науки (магистратура).

Оглавление

Предисловие 5
1. Основы классической финансовой математики 7
1.1. Несколько простых примеров и терминология 7
1.2. Поток платежей. Эквивалентность потоков 9
1.3. Общий случай и строгое определение 13
1.4. Модель баланса финансовой операции 14
1.5. Номинальная и эффективная процентные ставки по депозитам и кредитам. Полная стоимость кредита 17
1.6. Модель непрерывного начисления процентов. Число e 20
1.7. Доходность. Доходность вклада 22
1.8. Доходность кредита. Внутренняя доходность потока платежей. IRR 24
2. Избранные вопросы экономики и финансов, важные при знакомстве с финансовой математикой 28
2.1. Эффект финансового рычага 28
2.2. Инфляция 30
2.3. Анализ инвестиционных проектов 34
2.3.1. Приведенный доход проекта 34
2.3.2. Чистый приведенный доход проекта 35
2.3.3. Рентабельность (прибыльность) проекта 35
2.3.4. Срок окупаемости проекта 36
2.3.5. Внутренняя доходность проекта 36
2.3.6. Какими показателями пользоваться? 37
2.3.7. Любопытная информация 38
2.3.8. Точки Фишера 39
2.3.9. Еще одна характеристика инвестиционного проекта. Модифицированная внутренняя доходность проекта MIRR 41
2.4. Облигации и их дюрации 42
2.5. Время – деньги! 48
3. Финансовые расчеты в электронных таблицах и без них, или Компьютерные аспекты практических приложений классической финансовой математики 50
3.1. Парадигма. Microsoft Excel рулит 50
3.2. Концепция. Проверка дублированием 51
3.3. Решение простейшей задачи. Расчеты по вкладам 52
3.4. Расчеты по ссудам 58
3.5. Непосредственный расчет ссуд 62
3.6. Расчеты с помощью комбинации встроенной функции и «подбора параметра» 65
3.7. Расчеты характеристик инвестиционных проектов 67
3.8. Расчеты по облигациям 69

3.9. Финансовый пакет в программе wxMaxima 70
3.10. Некоторые финансовые возможности программы
Mathematica..72
3.11. О некоторых продуктах фирмы Wolfram Research 74
Кейсы из практики финансового директора 75
Литературные указания..78
Литература 79

Предисловие

Перед вами первая часть учебно-методического пособия «Компьютерные технологии в финансовой математике». Издание задумано как вводное и предназначено для читателей с различными уровнями подготовки. Оно возникло из курса для студентов математического факультета Воронежского государственного университета, планирующих работать в области экономики и финансов. Эти студенты имели (и имеют сейчас) очень разный уровень подготовки. Соответственно, курс и пособие задуманы как доступные студентам и читателям с минимальным уровнем подготовки и одновременно интересные и полезные для сильных студентов и читателей, приступающих к освоению математических и компьютерных методов в экономике и финансах. Опыт преподавания курса автором и опыт успешной последующей работы многих выпускников факультета, освоивших упомянутый курс, свидетельствует об эффективности разработанной методики. Безусловно, в успехах выпускников большую роль сыграли их достаточно высокие в среднем обучаемость, математическая культура и компьютерная подготовленность (как пользователей). Эти факторы были учтены и при подготовке курса и пособия. Стоит отметить, что никаких специальных математических знаний для чтения этой книги не требуется.

В основу данного учебно-методического пособия легло учебное издание «Компьютерные технологии в финансовой математике. Часть первая» Я. А. Израилевича, переработаннное и дополненное для настоящего издания.

Курс и пособие возникли не только из существующего массива литературы по финансовой математике и компьютерным технологиям, но и из бесед автора с выпускниками математического факультета Воронежского госуниверситета разных лет, успешно и давно (нередко задолго до создания упомянутых курсов и пособия) работающих в области экономики и финансов. Можно сказать, что без их успехов курс и пособие не были бы даже задуманы. Автор особенно благодарен В. С. Сотникову, беседы с которым были особенно часты и полезны, и который сделал ряд важных замечаний к пособию, а также предложил несколько оригинальных задач из практики финансового директора (они приведены в Приложении). Автор выражает благодарность за важные содержательные беседы Л. В. Жемчужникову, А. Н. Олейникова, С. А. Олейникова, Ю. Н. Сборец, И. К. Толстых, Д. А. Филатова.

Настоящее учебно-методическое пособие посвящено финансовой математике для задач в условиях определенности (так называемая классическая финансовая математика). В первом разделе изложены основы классической финансовой математики. Во втором рассмотрены избранные вопросы экономики и финансов, важные при знакомстве с финансовой математикой: эффект финансового рычага, инфляция, анализ инвестиционных проектов, облигации, роль процентных ставок. В третьем излагаются компьютерные аспекты практических приложений классической финансовой математики. В основном используется Microsoft Excel (или ее клон вроде LibreOffice Calc). Расчеты ведутся как с использованием встроенных финансовых функций, так и без них. Особое внимание уделяется повышению надежности получаемых результатов.

Как читать это пособие? Можно линейно, все разделы по порядку, пропуская при первом чтении то, что не кажется важным, и восполняя пропущенное по мере необходимости. А можно начать с третьего раздела, разбирая его тут же в Microsoft Excel, читая необходимые для понимания материалы из предшествующих разделов и выполняя предложенные упражнения.

В любом случае желаю Вам успеха!

Вторая часть пособия будет посвящена финансовой математике для задач в условиях неопределенности, главным образом, стохастической финансовой математике. Будут рассмотрены понятие риска, методы оптимизации в условиях неопределенности, математические модели операций на финансовых рынках, финансовая инженерия. Существенная часть пособия будет связана с компьютерными технологиями расчетов в соответствующих задачах.

Все совпадения с любыми другими текстами неслучайны. Все ошибки и неточности принадлежат автору. Автор заранее благодарен за все замечания.

1. ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Финансовая математика – математическая дисциплина, предоставляющая математический аппарат для практических финансовых расчетов и для экономической дисциплины – финансового анализа. Вместе с тем у финансовой математики есть собственные предмет, метод и история.

Финансовая математика занимается исследованием некоторых аспектов известного тезиса «Время – деньги!». Эти аспекты связаны с такими общеупотребительными вещами, как вклады (депозиты), кредиты, пенсии, а также с такими менее общеупотребительными, но всё же важными вещами, как облигации, акции, опционы и др.

Классическая финансовая математика занимается анализом соотношений между деньгами и временем в условиях определенности, т. е. не рассматривает возможности краха банка или исчезновения заемщика.

Стохастическая финансовая математика занимается как анализом соотношений между деньгами и временем при действии неопределенных и случайных факторов, так и анализом возникающих рисков.

Современные практические приложения финансовой математики опираются на компьютерные технологии.

Классическая финансовая математика – очень простая дисциплина. В XIX в. ее называли финансовой арифметикой. Злые языки говорят, что в классической финансовой математике нет ничего, кроме сложных процентов. Сейчас это, пожалуй, не совсем так, хотя, безусловно, формула сложных процентов лежит в основе классической финансовой математики.

Вместе с тем стоит отметить, что область применения классической финансовой математики широка и весьма важна. Это – депозиты, кредиты, облигации, пенсии негосударственных пенсионных фондов, анализ инвестиционных проектов и т. д. Цена конкретной ошибки в этих областях измеряется конкретной денежной суммой, а решения часто приходится принимать быстро. Поэтому для того, кто предполагает заниматься экономикой и финансами, важно уверенно ориентироваться в ситуациях, лежащих на стыке конкретных финансовых задач, конкретных математических моделей и конкретных компьютерных средств и методов. И никакие книги тут не помогут, если индивидуум не будет упражняться в решении конкретных задач, лежащих на вышеуказанном стыке (см. раздел 3).

1.1. Несколько простых примеров и терминология

Начнем с простых примеров и терминологии.

Пример 1.1.1. Пусть студент А положил в банк Б сумму P на депозит на 1 год при процентной ставке r, $r > 0$. Тогда через год банк Б выплатит студенту А сумму S, равную $P(1+r)$. Можно сказать, что сумма P – сегодня – эквивалентна сумме $P(1+r)$ – через год – при процентной ставке r. Процентную ставку r в данном случае измеряют в процентах за год (в процентах годовых). Коэффициент $(1+r)$ называют ***коэффициентом наращения*** (за год), а обратную величину $1/(1+r)$ – ***коэффициентом дисконтирования*** (за год). Величину $1/(1+r)$ иногда представляют в виде $1-d = 1/(1+r)$, в этом случае d называют ***учетной ставкой***. Ясно, что $P = (1-d)S$. На практике наращение (например, выплата дохода, большего номинальной начальной суммы вклада) выполняется в конце промежутка времени, а дисконтирование (дисконт – скидка, например от номинальной суммы векселя при покупке-продаже векселя) – в начале промежутка времени.

Пример 1.1.2. Пусть студент А положил в банк Б сумму P на депозит на 3 года при процентной ставке r, $r > 0$, измеренной в процентах годовых, и банк при определении дохода S использовал формулу простых процентов

$$S_А = P(1 + nr), \tag{1.1.1}$$

где $n = 3$ в данном случае.

Пусть другой студент В положил в банк Г такую же сумму P на депозит на 3 года при такой же процентной ставке r, измеренной в процентах годовых, но банк Г при определении дохода $S_В$ использовал формулу сложных процентов:

$$S_В = P(1 + r)^n, \tag{1.1.2}$$

где $n = 3$ в данном случае.

Заметим, что 1) $S_В > S_А$; 2) формула сложных процентов естественнее, чем формула простых процентов, так как учитывает возможность повторного инвестирования; 3) вычисления коэффициентов наращения (за n лет) по формуле сложных процентов чуть сложнее, чем по формуле простых процентов, но калькуляторы и персональные компьютеры эту разницу стерли.

Далее мы будем использовать формулу сложных процентов (если иное не оговорено явно).

Итак, можно сказать, что сумма P – сегодня – эквивалентна наращенной сумме $P(1+r)^n$ – через n лет – при процентной ставке r. Соответственно, можно сказать, что сумма $S_В$ – через n лет – эквивалентна дисконтированной сумме $S/(1+r)^n$ – сегодня – при процентной ставке r.

Более точно можно сказать, что денежные суммы $S(T)$ в момент T и $S(t)$ в момент t называются ***эквивалентными при процентной ставке*** r, если

$$S(T) = S(t)(1 + r)^{(T-t)}. \tag{1.1.3}$$

При $T > t$ это означает, что сумма $s(t)$, наращенная по ставке r (сложных процентов), превратится в момент T в сумму $S(T)$; однако можно считать, что T может быть и меньше t, тогда это означает, что сумма $S(T)$, наращенная по ставке r (сложных процентов), превратится в момент t в сумму $s(t)$. Формула (1.1.3) описывает оба эти случая. Очевидно, что можно сказать и по-другому: при $T > t$ эквивалентность сумм $S(T)$ и $s(t)$ означает, что сумма $S(T)$, уменьшающаяся при движении в прошлое за каждый единичный промежуток в $1/(1+r)$ раз, к моменту t превратится в точности в сумму:

$$S(t) = S(T) \Big/ \left[(1+r)^{(T-t)} \right]. \qquad (1.1.4)$$

Такой пересчет будущей суммы к настоящему моменту называют ***приведением*** или нахождением ее ***современной величины***. Сама же математическая операция сравнения денежных сумм в любые моменты времени называется ***математическим дисконтированием***.

Пример 1.1.3. Пусть студент Д взял в банке Е кредит величины P сроком n лет по процентной ставке r, $r > 0$, измеренной в процентах годовых, с ежегодной выплатой равных величин C. Величина C определяется из условия эквивалентности в данный момент времени t_0 совокупности всех платежей величине кредита P при процентной ставке r, т. е. из равенства величины P, полученной в данный момент t_0, сумме результатов $C/(1+r)^k$ дисконтирования платежей C, совершенных через k лет от текущего момента t_0, где $k = 1,\dots n$, т. е. из уравнения

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{(1+r)^k}, \qquad (1.1.5)$$

что дает

$$C = P \Big/ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k}. \qquad (1.1.6)$$

1.2. Поток платежей. Эквивалентность потоков

Мы приходим к понятию потока платежей и к понятию эквивалентности двух потоков.

Пусть в моменты времени 0, 1, …, N производятся платежи C_0, C_1, …, C_N. Числа C_k могут быть положительными, отрицательными и нолями. То, что мы отдаем, – отрицательно, а то, что мы получаем, – положительно (рис. 1.1–1.5). Такой объект называют ***потоком платежей***.

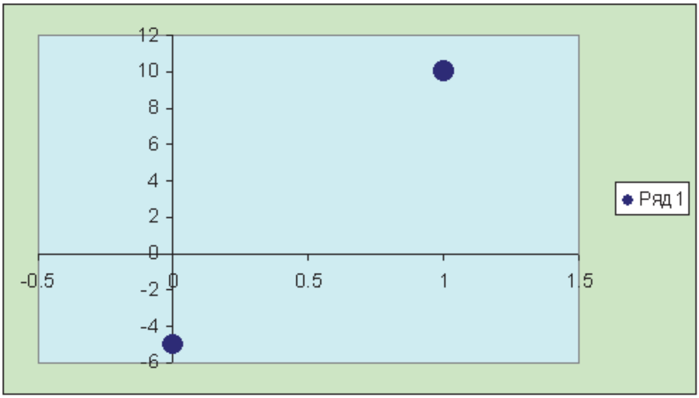


Рис. 1.1. Платежи операции депозита (вклада), диаграмма в Excel. Знак платежа указывает его направление (см. подразделы 1.2, 1.4)

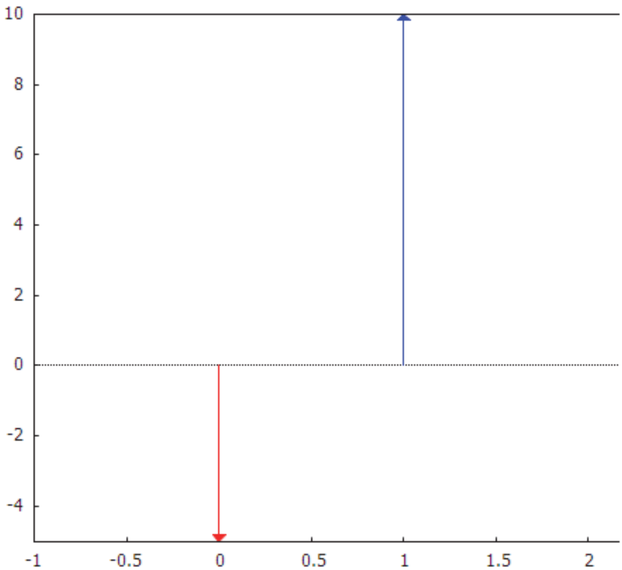


Рис. 1.2. Платежи операции депозита (вклада), те же платежи, что на рис. 1.1, рисунок в wxMaxima. Знак платежа указывает его направление (см. подразделы 1.2, 1.4)

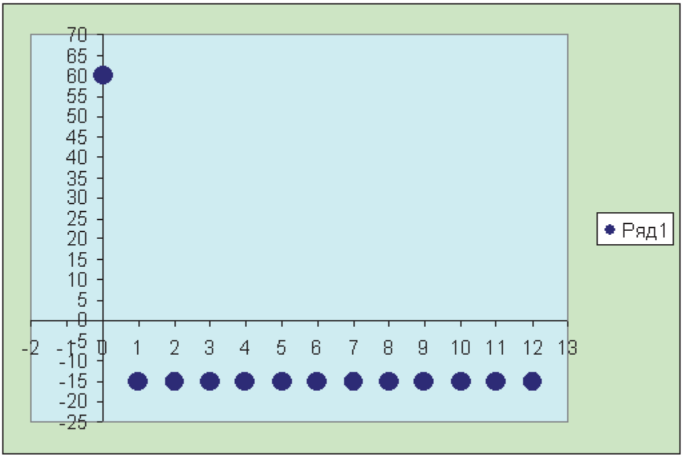


Рис. 1.3. Платежи операции кредита (займа), диаграмма в Excel.
Знак платежа указывает его направление (см. подразделы 1.2, 1.4)

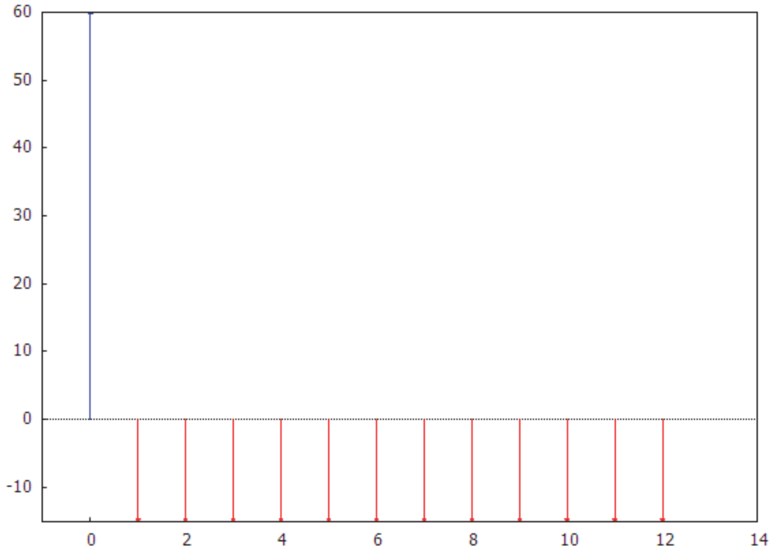


Рис. 1.4. Платежи операции кредита (займа), рисунок в wxMaxima.
Знак платежа указывает его направление (см. подразделы 1.2, 1.4)

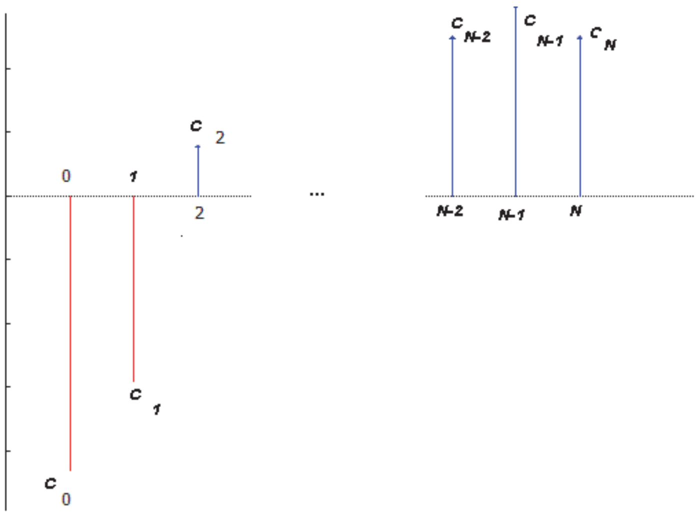


Рис. 1.5. Поток платежей

Если задана процентная ставка r, то каждый платеж C_k , совершаемый в момент времени k, может быть приведен наращением или дисконтированием к произвольному моменту времени M. Сумма этих платежей, приведенных к произвольному моменту времени M, объявляется потоком платежей, ***эквивалентным*** исходному при процентной ставке r, где $r > -1$. Особенно удобны и важны моменты $M = 0$ и $M = N$, связанные с началом и концом некоторой финансовой операции, которой сопоставлен данный поток платежей.

Настоящим (т. е. в настоящий момент времени $M = 0$) или ***современным значением потока платежей*** $C_0,C_1,\ldots,C_N$ при процентной ставке r называют величину:

$$pv = \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{(1+r)^k}, \tag{1.2.1}$$

где pv – единое обозначение, соответствующее английскому словосочетанию present value (настоящее значение).

Будущим (т. е. в будущий момент времени $M = N$) ***значением потока платежей*** $C_0, C_1,\ldots, C_N$ при процентной ставке r называют величину:

$$fv = \sum_{k=0}^{N} c_k (1+r)^{N-k}, \tag{1.2.2}$$

где fv – единое обозначение, соответствующее английскому словосочетанию future value (будущее значение).

Отметим, что на практике частым является случай $C_0 = 0$, как в примере 1.1.3.

Упражнение 1.2.1. Иногда для значительных промежутков времени бывает полезно рассматривать переменную процентную ставку. Так, банк имеет право при продлении договора вклада изменить процентную ставку, тогда при рассмотрении последовательности договоров вклада как единой финансовой операции следует рассматривать последовательность процентных ставок r_k, $k = 1, .., N$. Будем считать, что описанные ситуации уже произошли и банк менял ежегодно ставку договора сроком на один год, а договор каждый раз продлевался. Запишите аналог формулы (1.1.2) для описанного случая.

Упражнение 1.2.2. Безотносительно ситуации с вкладом запишите аналоги формул (1.2.1), (1.2.2) для последовательности процентных ставок r_k, $k = 1, .., N$.

1.3. Общий случай и строгое определение

Более общим образом можно определить ***поток платежей*** как вещественнозначную функцию $C(t)$ вещественного аргумента, равную нолю вне конечного множества точек $\{t_0, \ldots t_N\}$, причем значения N и t_k для разных потоков могут быть разными. Значение $C(t_k)$ функции (т. е. потока платежей) в точке t_k будем обозначать через C_k. При этом C_k может быть как отличным от ноля, так и равным нолю.

Будем говорить, что ***поток платежей*** $C(t)$ ***эквивалентен при процентной ставке*** r, где $r > -1$, потоку платежей, сосредоточенному в единственной точке T (т. е. $C(t) = 0$ вне единственной точки T) и имеющему в этой точке T значение S, если выполняется равенство

$$S = \sum_{k=0}^{N} c_k (1+r)^{(T-t_k)}. \qquad (1.3.1)$$

Формула (1.3.1) охватывает формулы (1.1.1)–(1.2.2) как частные случаи (убедитесь!). Можно более-менее строго выводить формулу (1.3.1) из некой системы аксиом, но эта деятельность мало что даст и для математики, и для финансов. Поэтому мы просто примем сказанное в предыдущем абзаце в качестве строгого определения.

Обоснованием формулы (1.3.1) может служить то, что ее правая часть есть суммарная стоимость в момент времени T всех вкладов размера C_k на сроки $[t_k, T]$ по процентной ставке r.

Упражнение 1.3.1. Объясните, каков практический смысл соотношений $r > 0$, $r = 0$, $-1 < r < 0$, $r = -1$, $r < -1$ для формул (1.1.3) и (1.3.1). В каких случаях эти формулы не работают и почему?

Упражнение 1.3.2. Посмотрите в Google и «Википедии» смысл терминов «рента», «аннуитет», «пренумерандо» и «постнумерандо».

Упражнение 1.3.3. Постройте теорию бесконечных рент (аннуитетов). Используя формулы для сумм членов геометрической прогрессии, найдите формулы для *fv, pv* для конечных и бесконечных рент (аннуитетов).

Далее, если явно не указано иное, мы будем рассматривать потоки платежей с носителями в $\{0..N\}$, т. е. потоки с платежами C_k в моменты $0, \ldots N$; среди платежей C_k могут быть как равные, так и не равные нолю.

1.4. Модель баланса финансовой операции

Одно из назначений финансовой математики – создание математических моделей финансовых операций, таких как модель вклада (1.1.2), модель кредита (1.1.5), более общие модели (1.2.1) и (1.2.2). Отметим, что в моделях (1.1.2), (1.1.5) левые и правые части равенств положительны. В этих моделях не вполне адекватно отображаются направления платежей, т. е. не вполне точно указано, платите ли вы банку или же банк платит вам.

Не вполне адекватно отображаются направления платежей и в моделях (1.2.1) и (1.2.2). Действительно, среди величин C_k могут быть как положительные, так и отрицательные, но если, скажем, сумма положительных приведенных к начальному моменту времени слагаемых больше модуля суммы отрицательных приведенных к начальному моменту времени слагаемых, то и *pv*, а за ним и *fv* оказываются положительными. Таким образом, то, что банк отдает вам, и то, что вы отдаете банку, – положительные числа, а это и означает, что в этих моделях направления платежей не отображаются адекватно. Поэтому наряду с вышеупомянутыми моделями используют и другие модели, учитывающие направления платежей так, что то, что мы отдаем, – отрицательно, а то, что мы получаем, – положительно. Если мы в модели (1.2.1) обозначим $\overline{PV} = -pv$, то получим

$$\overline{PV} + \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{(1+r)^k} = 0. \tag{1.4.1}$$

Аналогично модель (1.2.2) дает

$$\overline{FV} + \sum_{k=0}^{N} c_k (1+r)^{N-k} = 0. \tag{1.4.2}$$

Общую модель такого рода можно записать формально в виде

$$\overline{PV} + \sum_{k=0}^{N} \frac{C_k}{(1+r)^k} + \overline{FV} \big/ (1+r)^N = 0 \tag{1.4.3}$$

и в виде

$$\overline{PV}(1+r)^N + \sum_{k=0}^{N} C_k (1+r)^{N-k} + \overline{FV} = 0, \tag{1.4.4}$$

где условия и обозначения аналогичны условиям и обозначениям раздела 1.2.

Однако в данном случае $\overline{PV}$ соответствует исходным вовлеченным в финансовую операцию средствам одной из сторон непосредственно в момент начала финансовой операции (А), или настоящему значению потока платежей (Б), а $\overline{FV}$ соответствует окончательным располагаемым средствам той же стороны – результату финансовой операции непосредственно в момент окончания финансовой операции (А) или же будущему значению потока платежей (Б). При этом при наличии ненулевых C_k интерпретировать величины $\overline{PV}$ и $\overline{FV}$ следует, как правило, по схемам (АБ) или (БА), но не (А,А) или (Б,Б). Величины $\overline{PV}$ и $\overline{FV}$, в общем, не вполне соответствуют настоящему значению *pv* и будущему значению *fv* потока платежей из раздела 1.2.

Основанием для моделей (1.4.3) и (1.4.4) служит то, что «справедливая» при процентной ставке *r* финансовая операция должна давать обеим сторонам те преимущества, которые дают вклады по процентной ставке *r*, а других преимуществ давать не должна. Соответственно, сумма всех вовлеченных в финансовую операцию средств, приведенных при процентной ставке *r* к произвольному фиксированному моменту времени, должна равняться нолю.

Равенства (1.4.3) и (1.4.4) мы будем называть ***моделями (или уравнениями) баланса финансовой операции.***

Заметим, что в ряде встроенных финансовых функций программы MS Excel и ее клонов используется модель баланса финансовой операции как вполне учитывающая направления платежей. Эта модель уже встроена в программу. Задавая финансовую функцию и ее входные параметры, мы специфицируем уравнение, которое программа и решает, выдавая нам значение неизвестного, знак которого в соответствующей ситуации указывает направление платежа.

Равенства (1.4.3) и (1.4.4) следует рассматривать не как общие модели финансовых операций, а как метамодели, из которых при правильном подходе можно получать правильные модели конкретных финансовых операций, учитывающие направления платежей, а при неправильном подходе – ошибочные модели. Критериями правильности и неправильности подхода, конечно же, являются логика конкретной финансовой операции и практика. Для моделей конкретных финансовых операций обычно нетрудно понять, правильны они, или нет. Такие «условно корректные метамодели» рассматриваются здесь именно потому, что на них основаны встроенные финансовые функции программы MS Excel и ее клонов, учитывающие и указывающие направления платежей.

Для конкретных ситуаций часто бывает полезно использовать «краевые условия»

$$\overline{PV}\,\overline{FV} = 0, \qquad (1.4.5)$$

$$\overline{PV}C_0 = 0 \qquad (1.4.6)$$

и

$$\overline{FV}C_N = 0. \qquad (1.4.7)$$

При этом следует помнить о правиле «(АБ) или (БА)».

Нарушение этих условий может приводить и к неверным моделям. Если же все условия нарушены, то, скорее всего, модель неверна.

Пример 1.4.1. Если в (1.4.3) или (1.4.4) положить $\overline{PV} = \overline{FV} = 0$, $C_k = 0$, $k = 1 \ldots N-1$, получим модель вклада без промежуточных пополнений вклада и снятий со счета в течение срока вклада

$$C_0 + C_N \big/ (1+r)^N = 0 \tag{1.4.8}$$

или

$$C_0(1+r)^N + C_N = 0. \tag{1.4.9}$$

учитывающую направления платежей. Отметим, что эту простейшую модель сравнительно сложно реализовать с помощью финансовых функций MS Excel, хотя и не составляет труда просто записать и реализовать в MS Excel нужную формулу, соответствующую, скажем, (1.4.9) и вычислить C_N, что называется «в лоб».

Если в (1.4.3) или (1.4.4) положить $C_k = 0$, $k = 0 \ldots N$, получим также верную модель вклада без промежуточных пополнений вклада и снятий со счета в течение срока вклада:

$$\overline{PV} + \overline{FV} \big/ (1+r)^N = 0 \tag{1.4.10}$$

или

$$\overline{PV}(1+r)^N + \overline{FV} = 0, \tag{1.4.11}$$

равносильную (1.2), с той, однако, разницей, что

$$(-\overline{PV})(1+r)^N = \overline{FV}, \tag{1.4.12}$$

т. е. учитываются направления платежей. Отметим, что эту модель сравнительно легко реализовать с помощью финансовых функций MS Excel, хотя обе модели (1.4.9) и (1.4.11) можно критиковать за неполное соответствие описаниям $\overline{PV}$ и $\overline{FV}$, данным выше.

Пример 1.4.2. Модель кредита мы получим, если в (1.4.3) или (1.4.4) положим $\overline{FV} = 0$ (полностью расплатились) и $C_0 = 0$, $C_k = C$, $k = 1 \ldots N$ (равные выплаты в конце каждого периода, начиная с первого). Полученная модель

$$\overline{PV} + \sum_{k=1}^{N} \frac{c}{(1+r)^k} = 0 \tag{1.4.13}$$

равносильна модели (1.1.5), с той, однако, разницей, что (1.4.13) учитывает направления платежей.

Пример 1.4.3. Равенство (1.4.3) или (1.4.4) дает модель вклада с возможностью пополнения вклада и снятия части вклада со счета в течение срока вклада. При этом не всегда полезно использовать «краевые условия» (1.4.5)–(1.4.7). Полученная модель учитывает направления платежей.

Пример 1.4.4. Равенство (1.4.3) или (1.4.4) можно использовать в качестве модели накопления средств участников негосударственного пенсионного фонда. Скажем, полагая $\overline{PV} = 0$ и $C_0 = 0$, $C_k = C$, $k = 1 \ldots N$ (постоянный взнос), получаем

$$\sum_{k=1}^{N} c\ (1+r)^{N-k} + \overline{FV} = 0. \qquad (1.4.14)$$

Упражнение 1.4.5. Для конкретных финансовых операций приведите примеры правильных и неправильных моделей, которые можно вывести из моделей баланса.

Правильнее всего относиться к моделям баланса, как к достаточно гибкому и универсальному формату, в котором можно в различных ситуациях записывать универсальный тезис, утверждающий, что все, отданное в процессе сбалансированной сделки, возвращается в процессе этой сделки наращенным в соответствии с заданной ставкой.

1.5. Номинальная и эффективная процентные ставки по депозитам и кредитам. Полная стоимость кредита

На практике банки часто используют годовую процентную ставку и начисление процентов (или платеж) несколько раз в году (каждый месяц, каждый квартал, каждый день).

Пусть r – годовая процентная ставка, а m – количество равных промежутков, на которые разбит год (скажем, m = 12, 4, 365 для разбиения на месяцы, кварталы, дни). Формулы (1.3.1) , (1.2.1), (1.2.2), (1.4.3), (1.4.4) позволяют вести расчеты с помощью процентной ставки r_m за период (месяц, квартал, день), определив коэффициент наращения естественным образом как:

$$1+\ r_m = \left(1+r\right)^{(1/m)} = \sqrt[m]{1+r}. \qquad (1.5.1)$$

Однако поначалу, т. е. задолго до появления первых калькуляторов и даже до эпохи широкой доступности математических таблиц и логарифмических линеек, практическое применение формулы (1.5.1) было чересчур сложным для финансистов. Поэтому был выработан следующий, более удобный для проведения расчетов подход.

Пусть r – годовая процентная ставка, а m – количество равных малых промежутков (периодов), на которые разбит год. Положим процентную ставку r_m за период, равный r/m, т. е.:

$$r_m = r/m. \qquad (1.5.2)$$

Ставку r в модели (1.5.2) называют ***номинальной***. Мы будем обозначать ее $\boldsymbol{r_{ном}}$, так что $r_m = r_{ном}/m$.

Если срок финансовой операции (депозита, кредита) равен N лет, то общее количество периодов равняется Nm. Тогда формулы (1.2.1), (1.2.2), (1.4.3), (1.4.4) дают нам, соответственно, формулы:

$$pv = \sum_{k=0}^{Nm} \frac{c_k}{(1 + r_{ном} / m)^k}, \tag{1.5.3}$$

$$fv = \sum_{k=0}^{Nm} c_k (1 + r_{ном} / m)^{Nm-k}, \tag{1.5.4}$$

$$\overline{PV} + \sum_{k=0}^{Nm} \frac{c_k}{(1 + r_{ном} / m)^k} + \overline{FV} \Big/ (1 + r_{ном} / m)^{Nm} = 0, \tag{1.5.5}$$

$$\overline{PV}(1 + r_{ном} / m)^{Nm} + \sum_{k=0}^{Nm} c_k (1 + r_{ном} / m)^{Nm-k} + \overline{FV} = 0, \tag{1.5.6}$$

которые используют на практике чаще всего и сейчас.

Отметим два любопытных факта.

Во-первых, модель (1.5.2) оказалась в целом выгоднее для банков, чем модель (1.5.1). Возможно, живучесть модели (1.5.2) связана и с этим обстоятельством.

Во-вторых, формула (1.5.2) и соответствующая ей формула для вклада

$$S_B = P(1 + r_{ном}/m)^{(nm)}, \tag{1.5.7}$$

– сравните с обозначениями в формуле (1.1.2) – привели Якоба Бернулли к открытию числа e (см. «Википедия») – блестящий вклад «финансовой арифметики» в развитие математики.

Ставку r в модели (1.5.2) называют ***номинальной ставкой***, будем обозначать ее как $r_{ном}$.

Пусть теперь в формуле с начислением процентов m раз в году (1.5.7) количество лет $n = 1$. Рассмотрим величину S_B, соответствующую вкладу на 1 год без дробления года на промежутки, по некоторой ставке $r_{эф}$, которая, с одной стороны, определяется равенством:

$$S_B = P(1 + r_{эф}), \tag{1.5.8}$$

а с другой стороны, вычисляется по формуле (1.5.7) с $n = 1$. Тогда

$$P(1 + r_{ном}/m)^m = P(1 + r_{эф}). \tag{1.5.9}$$

Отсюда, естественно,

$$r_{эф} = (1 + r_{ном}/m)^m - 1. \tag{1.5.10}$$

Ставку $r_{эф}$ называют ***эффективной***, что и отражено в нашем обозначении.

Упражнение 1.5.1. Какая из моделей (1.5.1), (1.5.2) выгоднее для банка в ситуации депозита? Почему?

Упражнение 1.5.2. Какая из моделей (1.5.1), (1.5.2) выгоднее для банка в ситуации кредита? Почему?

Упражнение 1.5.3. Какая из моделей (1.5.1), (1.5.2) выгоднее для банка по совокупности кредитов и депозитов? Почему?

В договорах о предоставлении кредита банки прежде всего указывают номинальную ставку, которая бывает существенно меньше эффективной ставки кредита, определенной и рассчитанной из модели математического дисконтирования (сравните с (1.2.1), (1.3.1)):

$$pv = \sum_{k=0}^{Nm} \frac{c_k}{(1+r_{эф})^{k/m}}, \tag{1.5.11}$$

где pv соответствует выданной сумме кредита и удовлетворяет уравнению (1.5.3) и $t_0 = 0$, $T = N$.

Эффективную ставку кредита можно определить и рассчитать также из уравнения баланса финансовой операции (1.4.3):

$$\overline{PV} + \sum_{k=0}^{Nm} \frac{c_k}{(1+r_{эф})^{t_k/m}} = 0, \tag{1.5.12}$$

где $\overline{PV}$ соответствует выданной сумме кредита и удовлетворяет уравнению (1.5.5) с $\overline{FV} = 0$.

Если положить $t_0 = 0$, $T = N$ и $\Delta t = 1/m$, то из (1.5.11) получим:

$$pv = \sum_{k=0}^{Nm} \frac{c_k}{(1+r_{эф})^{(k\Delta t)}} \tag{1.5.13}$$

и

$$pv = \sum_{k=0}^{Nm} \frac{c_k}{(1+r_{эф})^{(k/m)}} \tag{1.5.14}$$

или, что эквивалентно, из модели баланса финансовой операции (1.5.12) получим:

$$\overline{PV} + \sum_{k=0}^{Nm} \frac{c_k}{(1+r_{эф})^{(k\Delta t)}} = 0 \tag{1.5.15}$$

и

$$\overline{PV} + \sum_{k=0}^{Nm} \frac{c_k}{(1+r_{эф})^{(k/m)}} = 0. \tag{1.5.16}$$

Заметим, что разрешимость уравнений (1.5.11)–(1.5.16) относительно $r_{эф}$ и существование единственного положительного корня обеспечивается должным выбором платежей C_k. Уравнения (1.5.11)–(1.5.16) относительно $r_{эф}$ эквивалентны при $r_{эф} > -1$, полиномиальным уравнениям (на самом деле – одному и тому же полиномиальному уравнению), поэтому у каждого из них может быть, по сути, несколько вещественных корней. Поэтому в качестве $r_{эф}$ берут наименьший положительный корень любого из этих уравнений.

Упражнение 1.5.4. Пусть все платежи C_k положительны. Покажите, что каждое из уравнений (1.5.11)–(1.5.16) имеет: а) не более одного положительного корня; б) не более одного корня, большего, чем (–1).

Упражнение 1.5.5. Приведите пример набора C_k и PV или pv, для которого каждое из уравнений (1.5.11)–(1.5.16) имеет более одного вещественного корня.

Упражнение 1.5.6. Предложите достаточное условие того, что каждое из уравнений (1.5.11)–(1.5.16) имеет только один положительный корень. Обоснуйте. Является ли таким условием

$$\sum_{k=0}^{Nm} C_k > pv > 0 \qquad (1.5.17)$$

для уравнений (1.5.13), (1.5.14) при неотрицательных C_k?

Упражнение 1.5.7. Предложите достаточное условие того, что каждое из уравнений (1.5.11)–(1.5.16) не имеет положительных корней. Обоснуйте.

Согласно действующему законодательству (2014 г.) банки обязаны указывать в договорах о предоставлении кредита фактическую ставку, учитывающую периодические и другие платежи, включая оплату услуг по карте, страховку и т. п. Такую ставку называют ***полной стоимостью***. Она также может быть определена и рассчитана с помощью любого из уравнений (1.5.11)–(1.5.16). Однако Федеральный закон Российской Федерации от 21 июля 2014 г. № 229-ФЗ «О внесении изменений в статью 6 Федерального закона «О потребительском кредите (займе)» дает иную формулу для полной стоимости. Познакомиться с ней советуем после усвоения материала по внутренней доходности *IRR* (см. подраздел 1.8). Можно сказать, что наши определения полной стоимости более соответствуют модели математического дисконтирования и поэтому более справедливы (точнее описывают реальность), чем приближенная «законная» формула. Впрочем, на практике разница несущественна (проверьте на конкретных примерах).

Отметим, что в интернете много различных материалов по расчету полной стоимости. Некоторые из них полезны, другие, напротив, недостаточно качественны и могут содержать ошибки.

Упражнение 1.5.8. Укажите оценки снизу и сверху для эффективной ставки по депозитам и кредитам. Насколько они точны?

1.6. Модель непрерывного начисления процентов. Число *e*

Из равенства (1.5.10) получаем, что

$$r_{эф} = (1 + r_{ном}/m)^{m} - 1 \rightarrow e^{r_{ном}} - 1 \qquad (1.6.1)$$

при $m \rightarrow +\infty$. При этом

$$1 + r_{ном} \le (1 + r_{ном}/m)^{m} < e^{r_{ном}}. \qquad (1.6.2)$$

Соответственно, если задать некоторую годовую ставку $r_{год}$, то, учитывая (1.6.1), можно записать уравнение относительно неизвестной $r_{ср}$

$$e^{r_{ср}} - 1 = r_{год}, \qquad (1.6.3)$$

решением которого является

$$r_{ср} = \ln(1 + r_{год}). \qquad (1.6.4)$$

Примеры значений номинальной, эффективной и годовой ставок при непрерывном начислении процентов по номинальной ставке приведены на рис. 1.6.

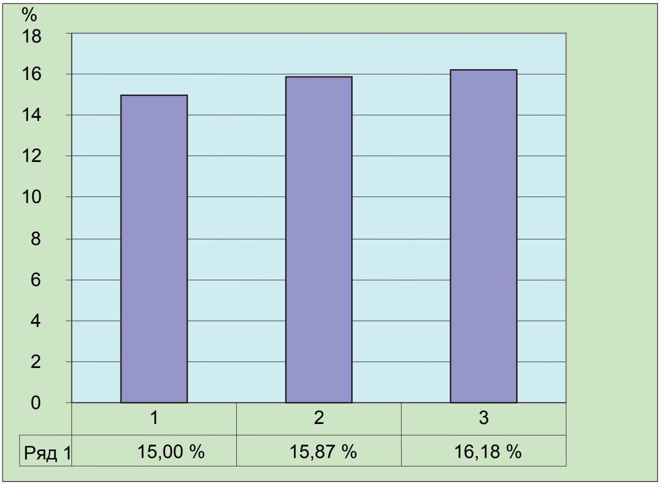


Рис. 1.6. 1 – номинальная ставка, 2 – эффективная ставка, 3 – годовая ставка при непрерывном начислении процентов по номинальной ставке

Величину $r_{ср} = \ln(1 + r_{год})$ называют ***силой роста***, или ***непрерывной процентной* ставкой**, соответствующей годовой процентной ставке $r_{год}$.

Заметим, что

$$S(t) = S(0)e^{rt} \qquad (1.6.5)$$

– решение дифференциального уравнения

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r dt \qquad (1.6.6)$$

или

$$\frac{1}{S(t)}\frac{dS(t)}{dt} = r, \qquad (1.6.7)$$

которое можно записать в виде

$$\frac{d(\ln S(t))}{dt} = r. \qquad (1.6.8)$$

Полагая t = 1 в (1.6.5) и сравнивая с (1.6.3), получаем, что

$$S(1) = S(0)e^r, \qquad (1.6.9)$$

где e^r естественно считать множителем наращения за год

$$e^r = 1 + r_{год}, \qquad (1.6.10)$$

соответствующим силе роста $r_{ср} = r$.

Модель (1.6.6), так же, как и эквивалентные ей модели (1.6.7), (1.6.8), называют моделью непрерывного начисления процентов. Стоит отметить, что модель непрерывного начисления процентов в классической финансовой математике обычно не используется. Зато она играет существенную роль в стохастической финансовой математике, где является составной частью так называемой (B, S)-модели – важнейшей модели стохастической финансовой математики.

1.7. Доходность. Доходность вклада

Финансовой операцией назовем любую деятельность, в течение которой имеется денежная оценка средств, находящихся в распоряжении проводящего эту деятельность субъекта (физического или юридического лица) и тем или иным образом использованных в этой деятельности. Простыми примерами финансовых операций являются вклады, кредиты, деятельность торговых, промышленных, сельскохозяйственных предприятий (скажем, в течение года).

Под денежной оценкой начала операции обычно понимают размер вложенных инвестиций, затраты или просто наличный капитал, под денежной оценкой конца операции – наращенный капитал, полученный доход и потери.

Мы будем рассматривать дискретное время.

Математической моделью финансовой операции является вещественнозначная функция $S(t)$, определенная хотя бы в двух точках оси времени: t_0, T.

Доходностью финансовой операции за период операции $[t_0, T]$ будем называть величину R, определяемую соотношением

$$S(T) = (1+R)\,S(t_0) \qquad (1.7.1)$$

или

$$R = (S(T) - S(t_0))/S(t_0). \qquad (1.7.2)$$

Доходностью финансовой операции в процентах годовых назовем величину r, такую, что

$$S(T) = S(t_0)(1+r)^{(T-t_0)} \tag{1.7.3}$$

или

$$R = (1+r)^{(T-t_0)} - 1, \tag{1.7.4}$$

откуда

$$r = (1+R)^{1/(T-t_0)} - 1. \tag{1.7.5}$$

Введенные в (1.7.1) и в (1.7.3) понятия позволяют сравнивать друг с другом различные финансовые операции. Доходность финансовой операции в процентах годовых (1.7.3) несколько удобнее, так как позволяют сравнивать финансовую операцию с банковским вкладом и с кредитом.

С точки зрения вкладчика для успешно завершившегося вклада на 1 год без промежуточных начислений процентов доходность финансовой операции в процентах годовых совпадает с процентной ставкой, так как и для доходности финансовой операции в процентах годовых, и для процентной ставки выполняется одно и то же равенство:

$$S(T) = S(t_0)(1+r). \tag{1.7.6}$$

Аналогичное совпадение имеет место и для более сложных вариантов операции вклада (для вклада на n лет, для вклада на n лет с ежемесячным начислением процентов – при рассмотрении правильной процентной ставки, а именно помесячной ставки и, соответственно, доходности за месяц).

Процентная ставка по вкладу определяется договором. Доходность финансовой операции вклада как за период операции, так и в процентах годовых, может быть рассчитана по результатам финансовой операции – вклада. В этом случае доходность финансовой операции – вклада в процентах годовых может существенно отличаться от процентной ставки. В частности, доходность финансовой операции – вклада в процентах годовых может быть отрицательной.

Упражнение 1.7.1. Пусть студент А положил в банк Б сумму 100 000 руб. на депозит на 1 год при процентной ставке 10 %, без промежуточного начисления процентов и получил через год 110 000 руб.

Пусть студент В положил в банк Г, входивший в систему страхования вкладов, сумму 100 000 руб. на депозит на 1 год при процентной ставке 13 % без промежуточного начисления процентов. Через полгода банк Г разорился, и у него отозвали лицензию. Еще через полгода студент В получил, благодаря страхованию вкладов, сумму вклада 100 000 руб. Пусть студент Д положил в финансовую организацию «Мидас Черноземья» сумму 100 000 руб. на депозит на 1 год при процентной ставке 50 %, без промежуточного начисления процентов. Через полгода «Мидас Черноземья» разорился, его руководство срочно выехало на разные средиземноморские побережья. Студент Д никогда не получил ничего со своего вклада.

Подсчитайте в каждом случае доходность финансовой операции за период операции и доходность финансовой операции в процентах годовых.

На этапе планирования можно считать доходность финансовой операции в процентах годовых равной процентной ставке (при условии надежности банка). Более правильно рассматривать доходность как случайную величину. Так и делают в стохастической финансовой математике. Пока мы будем сознательно ограничиваться ситуациями, в которых доходность можно рассматривать как детерминированную величину. Это – ситуации рассмотрения уже совершенной сделки и ситуации рассмотрения планируемой сделки; как правило, в окончательном варианте условия планируемой сделки закрепляют юридически – договором.

С точки зрения банка вклад (депозит) убыточен и имеет отрицательную доходность, равную процентной ставке. Однако рассматривать операцию вклада (с точки зрения банка) как изолированную операцию нерационально с точки зрения банка, такие операции имеют смысл только как составные части кредитно-депозитной деятельности банка (грубо говоря, банк дает в кредит заемщикам те деньги, которые ему приносят на депозит вкладчики). К рассмотрению доходности для операций кредита мы приступим позднее. Более сложную по своей структуре кредитно-депозитную деятельность банка обычно описывают не в литературе по финансовой математике, а в финансово-экономической литературе, так как эта деятельность сильно регламентирована нормативными актами органов власти, и эти нормативные акты требуют подробного описания. Разумеется, существуют математические модели кредитно-депозитной деятельности банков, но они оказываются достаточно усложненными.

1.8. Доходность кредита. Внутренняя доходность потока платежей. IRR

Для определения доходности кредита непосредственное использование определений (1.7.1), (1.7.2) не вполне очевидно. Воспользуемся формулой (1.2.1):

$$pv = \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{(1+r)^k},$$

которая в разделах 1.1, 1.2 возникла как формула для расчета параметров операции кредита при заданной процентной ставке r. Теперь будем считать, что величины кредита pv и платежей $C_0, C_1, \ldots, C_N$ известны и фиксированы, $C_0 = 0$, а величина r неизвестна. Перепишем равенство (1.2.1) в виде

$$pv = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{(1+x)^k}. \qquad (1.8.1)$$

Уравнения вида (1.8.1) могут иметь лишь конечное число корней. Наименьший положительный корень x уравнения (1.8.1) называют внутренней нормой доходности (или просто внутренней доходностью) для потока платежей ($-pv$, $C_1,\ldots,C_N$) и обозначают IRR (Internal Rate of Return). Очевидно, при заданных r и остальных параметрах кредита pv, $C_0 = 0$, $C_1,\ldots,C_N$ имеем $IRR = r$. В качестве доходности для операции кредита и берут $IRR = r$.

Рассмотрим будущее значение потока платежей

$$fv = \sum_{k=1}^{N} c_k (1+r)^{N-k}. \qquad (1.8.2)$$

В качестве доходности операции кредита берут

$$R = (fv - pv)/pv. \qquad (1.8.3)$$

Заметим, что с точки зрения бухгалтерии будущее значение fv больше суммы платежей, полученных банком у заемщика, скажем, при выплате положительных платежей не менее двух раз. Будущее значение, вычисляемое по формуле (1.8.2) и аналогичным ей, учитывает то, что платежи, совершенные заемщиком на более ранних этапах (до этапа N), тут же снова бросаются банком в дело, а именно, выдаются в кредит по ставке r. Таким образом, формула (1.8.3), очевидная для вклада, не вполне тривиальна для кредита.

Более общим образом, рассмотрим некоторый поток платежей C_0, $C_1,\ldots,C_N$. Наименьший положительный корень x уравнения

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{(1+x)^k} = 0, \qquad (1.8.4)$$

если он существует, называют ***внутренней нормой доходности*** (или просто внутренней доходностью) для потока платежей C_0, $C_1,\ldots, C_N$ и обозначают ***IRR.*** В такой модели для ситуации кредита величина C_0 соответствует выданной сумме кредита с учетом направления платежа. Отметим, что в некоторых ситуациях может представлять интерес отрицательный корень уравнения, особенно, когда вещественный корень единственный и $-1 < x < 0$, так как в этом случае, скорее всего, поток платежей соответствует убыточной финансовой операции, и можно считать, что внутренняя доходность отрицательна. Естественно, внутренняя доходность в процентах годовых для потока платежей определяется соотношениями, аналогичными (1.7.4), (1.7.5), при том что в качестве доходности R операции используется внутренняя доходность IRR потока платежей.

Упражнение 1.8.1. Рассмотрим финансовую операцию вклада на 1 год без промежуточных начислений процентов. Покажите, что для такой финансовой операции значения доходности операции и доходности в процентах годовых, получаемые при рассмотрении потока платежей (внутренние доходности), совпадают со значениями этих величин, полученными непосредственно по определению (см. раздел 1.7).

Упражнение 1.8.2. Покажите, что при $C_0 > 0$ и $C_1,\ldots, C_N < 0$ уравнение (1.8.4) имеет решение x > –1, причем решение, удовлетворяющее условию $x > -1$, только одно. Дайте два доказательства : а) с помощью исследования левой части на промежутке $(-1,+\infty)$; б) с помощью замены $y = 1/(1 + x)$ при $x > -1$ и применения правила Декарта к многочлену $C_0 + C_1y + \ldots C_N y^N$. (По правилу знаков Декарта число положительных вещественных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно k – числу перемен знака в ряду коэффициентов многочлена или k минус положительное четное число. Корни считаются с учетом кратности, нулевые коэффициенты при подсчете числа перемен знаков не учитываются. Если $k = 1$, то многочлен имеет единственный вещественный корень.)

Упражнение 1.8.3. Для финансовой математики те корни уравнения (1.8.4), которые меньше, чем (–1), не интересны. Однако возможны ли такие корни? Приведите пример.

Упражнение 1.8.4. Сформулируйте и докажите для потока платежей C_0, $C_1,\ldots,C_N$ достаточное условие существования внутренней нормы доходности *IRR*, т. е. наименьшего положительного корня x уравнения (1.8.3). Являются ли такими условия:

а) $C_0 < 0$ и $C_1,\ldots, C_N >0$?

б) $0 < -C_0 < C_1 +\ldots+ C_N$?

Упражнение 1.8.5. Рассмотрим финансовую операцию кредита на n лет с ежегодными платежами выплаты кредита. Покажите, что для такой финансовой операции значения доходности операции и доходности в процентах годовых, получаемые при рассмотрении потока платежей (внутренние доходности), совпадают со значениями этих величин, полученными непосредственно по определению (см. раздел 1.7).

Замечание о терминологии. Термин «доходность», соответствующий английским терминам «rate», «rate of return», сам по себе неудачен. Во-первых, доходность на самом деле соответствует прибыли, а не доходу (доходу соответствует коэффициент наращения). Термин «прибыльность» был бы точнее, однако он не используется, можно сказать, что такого термина не существует. (Отметим, что причиной тому – сами англичане с их «rate of return».) Во-вторых, выражение «доходность кредита» плохо воспринимается теми, кто хоть раз в жизни брал кредит. Поэтому обычно говорят о ставке по кредиту, или ставке кредита, или кредитной ставке. Получается, что, когда в ситуации вклада говорят о доходности вклада или о ставке по вкладу, в ситуации кредита говорят о ставке по кредиту (варианты см. выше), в ситуации произвольного потока платежей (в том числе в ситуации инвестиционного проекта) говорят о внутренней норме доходности или внутренней доходности), хотя с точки зрения математики это одно и то же понятие, работающее в разных конкретных ситуациях. В стохастической финансовой математике также используется термин «доходность», хотя термин «прибыльность» был бы точнее.

Возможно, было бы правильнее использовать единообразные термины «процентная ставка финансовой операции», «ставка финансовой операции», «ставка вклада», «ставка кредита», «внутренняя ставка потока платежей» и т. п. Однако лучше, если читатели будут осведомлены о разнообразии существующей терминологии.

2. ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ, ВАЖНЫЕ ПРИ ЗНАКОМСТВЕ С ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКОЙ

Вопросы, рассмотренные в этом разделе, если и не относятся к основам классической финансовой математики, то помогают понять связь финансовой математики с реальными финансами и экономикой.

2.1. Эффект финансового рычага

Роль процентной ставки отнюдь не исчерпывается депозитами и потребительским кредитом. Одна из основ современных производства и торговли – использование заемного капитала с помощью производственного и торгового кредита.

В финансовом анализе используются понятия финансового рычага и эффекта финансового рычага.

Финансовый рычаг (финансовый леверидж) – это отношение заемного капитала компании к собственным средствам, он характеризует степень риска и устойчивость компании. Чем меньше финансовый рычаг, тем устойчивее положение. В то же время заемный капитал позволяет увеличить коэффициент рентабельности собственного капитала, т. е. получить дополнительную прибыль на собственный капитал. Показатель, отражающий уровень дополнительной прибыли при использования заемного капитала (т. е. дополнительной к прибыли, получаемой только при использовании собственного капитала), называется ***эффектом финансового рычага***. Он рассчитывается по следующей формуле:

$$E = (1–G)(R–r)(Z/S), \qquad (2.1.1)$$

где E – эффект финансового рычага, обычно представляется в процентах; G – ставка налога на прибыль, представляется десятичной дробью; R – коэффициент рентабельности активов (отношение валовой прибыли к средней стоимости активов), представляется в процентах; r – средний размер ставки процентов за кредит, для более точного расчета можно брать средневзвешенную ставку за кредит; Z – средняя сумма используемого заемного капитала; S – средняя сумма собственного капитала компании.

Можно сказать, что эффект финансового рычага есть достающаяся компании часть прибыли, возникающей за счет использования заемного капитала, в расчете на 1 рубль собственного капитала компании.

Формула (2.1.1) расчета эффекта финансового рычага содержит три сомножителя. На первый $(1 – G)$ компания повлиять не может. Второй $(D = R – r)$ – разность между рентабельностью активов и процентной ставкой за кредит – носит название ***дифференциал***. Третий $(L = Z/S)$ – финансовый рычаг, т. е. отношение заемного капитала компании к собственным средствам. Тогда (2.1.1) можно записать в виде:

$$E = (1-G)DL. \tag{2.1.2}$$

Можно сделать следующие выводы:

Вывод 2.1.1. Эффективность использования заемного капитала зависит от дифференциала, т. е. от разности рентабельности активов и процентной ставки за кредит. Если ставка за кредит выше рентабельности активов – использование заемного капитала убыточно.

Замечание. 2.1.1. Во время написания данного текста широко обсуждаются санкции Запада против России. Наиболее важными для экономики России из этих санкций являются ограничения для крупнейших российских банков и компаний на получение кредитов на Западе. Эти ограничения привели к удорожанию кредитов и на рынках Юго-Восточной Азии и Ближнего Востока, кредит в которых по-прежнему доступен для российских банков и компаний. При этом и для компаний, кредитующихся в российских банках, кредит подорожал. Таким образом, для российских компаний средняя ставка r в (2.1.1) увеличилась, а дифференциал D в (2.1.2) уменьшился. В итоге эффективность использования заемного капитала для российских компаний снизилась.

Вывод 2.1.2. При $D > 0$ и прочих равных условиях бóльший финансовый рычаг L дает бóльший эффект.

Замечание. 2.1.2. Слишком большой финансовый рычаг L приводит к неустойчивости компании. Для разных отраслей экономики и разных видов деятельности оптимальными считаются различные значения финансового рычага L.

Замечание. 2.1.3. Как уже отмечалось, использование заемного капитала – одна из основ современного способа производства и торговли. Карл Маркс и его последователи утверждают, что разнообразные кризисы – неотъемлемые спутники капитализма и, в частности, использования заемного капитала.

Так называемый «социалистический способ производства», с одной стороны, не оказался достаточно эффективным, а с другой стороны, «социалистические финансы», в общем-то, копировали капиталистические.

В странах со значительным мусульманским населением развиваются так называемая исламская экономика и исламские финансы. Их сущность – это прежде всего отказ от процента и от фьючерсных сделок, сопряженных с риском. Вместо них применяется проектное инвестирование, которое связано с долевым участием и разделом рисков. Банк не получает процента, банк изучает у человека, который пришел к нему за деньгами, предложенный бизнес-план; банк анализирует риски, банк участвует в полученных прибылях и убытках. Существуют исламское страхование и исламская ипотека, возможны даже исламские опционы. Однако удельный вес исламской экономики очень мал сравнительно с общим весом экономики на планете. Видимо, пока эффективной альтернативы использованию заемного капитала нет.

2.2. Инфляция

В первом разделе настоящего пособия мы выяснили, что деньги, используемые людьми и организациями в процессах хозяйственной деятельности, обладают свойством наращения в соответствии с полученной доходностью. Это – одно из проявлений тезиса «Время – деньги!». В разделе 2.1 показано, как именно деньги работают в процессах хозяйственной деятельности. Однако есть еще один аспект выражения «Время – деньги!», которому подвержены как «работающие» деньги, так и деньги, смирно лежащие под матрасом, и которое известно как инфляция.

Инфляция – это ***обесценение валюты*** отдельной страны (или группы стран, как евро), проявляющееся в росте товарных цен. В современной экономике инфляция возникает как следствие целого комплекса причин (факторов), так что инфляция – это не чисто денежное явление, но экономический и социально-политический феномен.

Существует несколько методов расчета величины инфляция, каждый из этих методов допускает некоторый произвол. Обсуждать преимущества и недостатки различных методов вряд ли стоит. Важно, что эти методы приводят примерно к равноценным результатам, позволяющим более-менее точно оценить ситуацию, а расхождения между методами нивелируются тем обстоятельством, что в любом случае расчет в некотором смысле подобен расчету «средней температуры по больнице».

Распространен следующий способ расчета уровня инфляции с помощью так называемого индекса потребительских цен. Рассматривается некоторое количество определенных товаров, это количество назовем «корзиной». Рассмотрим в прошлом некоторый промежуток времени стандартной длины (год или месяц) с порядковым номером k; будем обозначать его $[k-1, k]$. Пусть $A(k-1)$, $A(k)$ стоимость «корзины» в моменты времени $k-1$ и k, соответственно. Обозначим $\Delta A = A(k) - A(k-1)$, тогда

$$A(k) = A(k-1) + \Delta A = A(k-1)(1 + \Delta A/A(k-1)). \qquad (2.2.1)$$

Обозначим

$$h(k) = \Delta A/A(k-1). \qquad (2.2.2)$$

Тогда

$$A(k) = A(k-1)(1 + h(k)). \qquad (2.2.3)$$

Величину $h(k)$ называют ***уровнем инфляции,*** или ***темпом роста цен*** в k-том промежутке времени (году или месяце). Величину же

$$A(k)/A(k-1) = (1 + h(k)) \qquad (2.2.4)$$

называют ***индексом цен*** в k-том промежутке времени (году или месяце). Величину $h(k)$ обычно выражают в процентах.

От величины уровня инфляции существенно зависит эффективность экономики страны.

В зависимости от величины уровня инфляции (темпа роста цен) выделяют следующие виды инфляции:

1) ***умеренная***, она же ползучая, – рост цен не более 10 % в год; эта инфляция управляемая, ее сравнительно легко регулировать; инфляцию до 3 % в год эксперты считают наилучшей для экономики;

2) ***галопирующая*** (скачкообразная) – рост цен от 10 до 50 % в год; такую инфляцию трудно регулировать, экономика испытывает трудности;

3) ***гиперинфляция*** – рост цен более 50 % в месяц; инфляция неуправляемая и требует чрезвычайных мер, экономика переживает глубокий кризис.

Рассмотрим равенство

$$S = P(1 + r), \tag{2.2.5}$$

которое является, с одной стороны, моделью депозита на 1 год при процентной ставке r, а с другой стороны, моделью кредита на 1 год при процентной ставке r.

Если в течение ряда предшествующих лет уровень инфляции равнялся h, то будем предполагать, что уровень инфляции постоянен, тогда с точки зрения покупательной способности получаем, что наращенной сумме S соответствует покупательная способность

$$Q = S/(1 + h) = P(1 + r)/(1 + h). \tag{2.2.6}$$

Очевидно, при $r > h$ имеем $Q > P,$ а при $r < h$ имеем $Q < P$. Рассмотрим, так же, как в 1.7 доходность в процентах годовых, но доходность будем рассчитывать относительно покупательной способности. Получим, что

$$R = \frac{Q-P}{P} = \frac{P\dfrac{(1+r)}{(1+h)} - P}{P} = \frac{(1+r)}{(1+h)} - 1 = \frac{(r-h)}{(1+h)}. \tag{2.2.7}$$

Тогда для того, чтобы получить заданную доходность финансовой операции r в процентах годовых относительно покупательной способности, нам следует положить доходность финансовой операции r в процентах годовых относительно цены («формальную доходность») равной

$$r_{бр} = h + r(1 + h). \qquad (2.2.7)$$

Здесь $r_{бр}$ обозначает так называемую ставку-брутто.

При небольших h и r произведение hr мало и

$$r_{бр} \approx h + r\,. \tag{2.2.8}$$

Из (2.2.7) видно, что при больших значениях уровня инфляции h ставка-брутто $r_{бр}$ также становится большой и поэтому может оказаться неприемлемой для банка, принимающего вклады, и для заемщиков, берущих кредиты. Это затрудняет производство и торговлю (см. раздел 2.1.). Хотя постоянство инфляции (хотя бы приближенное) можно считать относительным преимуществом, поскольку позволяет более-менее точно оценить ситуацию.

Естественно, вышеописанный способ действий (введение $r_{бр}$) основан на стабильности инфляции, так как в противном случае значение h на текущий год в начале года неизвестно. В рамках детерминированной математики (математики детерминированных величин) рассматривать такую модель при непостоянном h затруднительно; следует переходить к стохастической математике. Но это мы пока отложим и ограничимся здесь качественным анализом a posteriori (т. е. «задним числом»).

Рассмотрим равенство

$$S_n = P(1 + r)^n, \tag{2.2.9}$$

которое является, с одной стороны, моделью депозита на n лет при процентной ставке r, а с другой стороны, моделью кредита на n лет при процентной ставке r с выплатой единственного платежа в конце срока.

Обозначим год начала финансовой операции через k_1. Пусть $h(k)$ – уровень инфляции в k-том году. Тогда покупательная способность Q_n суммы S_n равняется

$$Q_n = \frac{S_n}{\prod\limits_{k=k_1}^{k_1+n-1}(1+h(k))} = \frac{P(1+r)^n}{\prod\limits_{k=k_1}^{k_1+n-1}(1+h(k))}. \tag{2.2.10}$$

Предположим, что инфляция растет, причем существует k_2 меньшее, чем n, начиная с которого все

$$h(k) > r, \tag{2.2.11}$$

тогда, начиная с $n = k_2 + 1$, последовательность покупательных способностей Q_n монотонно убывает. Это означает, что в условиях растущей инфляции с ростом срока финансовой операции уменьшается покупательная способность Q_n возвращаемой суммы S_n. При сильной инфляции вполне может оказаться, что покупательная способность Q_n возвращаемой суммы S_n меньше чем P, т. е. меньше покупательной способности суммы депозита (кредита) в начале операции. Таким образом, в условиях растущей инфляции долгосрочные депозиты невыгодны вкладчику и выгодны банку, а долгосрочные кредиты невыгодны банку и выгодны заемщику. Собственно говоря, это ясно и без формул, но формула (2.2.10) полезна тем, что позволяет сравнить покупательные способности результата финансовой операции и первоначальной суммы.

Аналогично можно показать, что в условиях убывающей инфляции долгосрочные депозиты выгодны вкладчику и невыгодны банку, а долгосрочные кредиты выгодны банку и невыгодны заемщику.

Упражнение 2.2.1. Запишите формулу, позволяющую сравнивать покупательные способности сумм, относящихся к разным годам, при заданных уровнях инфляции $h(k)$.

Упражнение 2.2.2. Покажите, что в условиях убывающей инфляции долгосрочные депозиты выгодны вкладчику и невыгодны банку, а долгосрочные кредиты с выплатой единственного платежа в конце срока выгодны банку и невыгодны заемщику.

Упражнение 2.2.3. Рассмотрите кредиты с ежемесячными платежами. Покажите, что в условиях растущей инфляции долгосрочные кредиты невыгодны банку и выгодны заемщику, а в условиях убывания высокого уровня инфляции долгосрочные кредиты выгодны банку и невыгодны заемщику.

Приведем в табл. 2.2.1 данные по динамике уровня инфляции в Российской Федерации.

Таблица 2.2.1

Год	Inf, %
1991	160,4
1992	2508,8
1993	840,0
1994	215,0
1995	131,6
1996	21,8
1997	11,0
1998	84,4
1999	36,5
2000	20,2
2001	18,6
2002	15,1
2003	12,0
2004	11,7
2005	10,9
2006	9,0
2007	11,9
2008	13,3
2009	8,1
2010	8,8
2011	6,1

Более подробные и более современные данные можно найти на сайте Банка России.

Упражнение 2.2.4. Сравните покупательные способности суммы 100 000 руб. в 1991 и 1997 гг., в 2000 и 2011 гг., в 2000 и 2013 гг. Отметим, что в 1998 г. прошла так называемая деноминация, без учета которой неправильно напрямую сравнивать покупательные способности суммы 100 000 руб., скажем, в 1991 и 2013 гг.

Упражнение 2.2.5. Можете ли вы связать всплески инфляции и изменения ее тенденции с событиями в политической и экономической жизни России?

Явление, противоположное инфляции, называют ***дефляцией***. Оно состоит в ***удорожании валюты отдельной страны (или группы стран), проявляющемся в снижении товарных цен.*** В случае дефляции величины $h(k)$ отрицательны (см. (2.2.2)).

Дефляция создает проблемы для экономики, но встречается сравнительно редко. Сейчас угрозы дефляции характерны для таких стран, как Япония, США, стран, использующих валюту евро. Финансовые власти этих стран борются с дефляцией («количественное смягчение», т. е. выпуск дополнительных денежных средств, интервенции Центральных Банков на валютном рынке и др.).

2.3. Анализ инвестиционных проектов

Наряду с производственными и торговыми кредитами (их мы коснулись в разделе 2.1) важнейшей сферой взаимодействия финансов и реальной экономики являются инвестиционные проекты. Задача разработчиков таких проектов – подготовить проекты, задача потенциальных инвесторов – оценить проекты и выбрать наилучшие. Для объективного анализа и оценки инвестиционных проектов разработан ряд показателей, использующих математическое дисконтирование.

2.3.1. Приведенный доход проекта

Любому инвестиционному проекту можно естественным образом сопоставить поток платежей, платежи C_k которого отрицательны, если соответствуют планируемым инвестициям, и положительны, если соответствуют планируемым доходам. Начальный платеж C_0 для любого инвестиционного проекта отрицателен, иначе это вовсе не инвестиционный проект. Часто рассматривают инвестиционные проекты с единственной начальной инвестицией C_0, т. е. такие, для которых $C_k \geq 0$ при $k > 0$. В этих случаях мы будем обозначать C_0 через I_0, $I_0 < 0$. Инвестиционные проекты возникают не в безвоздушном пространстве, а в реальной экономике, поэтому можно считать известным примерное минимальное значение r процентной ставки по доступным кредитам. Обычно это значение близко к максимальному значению процентной ставки по возможным депозитам. Благодаря этому математическое дисконтирование реально задает эквивалентные величины для разных моментов времени.

Приведенным доходом инвестиционного проекта PV называют сумму приведенных в соответствии с процентной ставкой r к начальному моменту времени всех доходов проекта, т. е. всех $C_k \geq 0$:

$$PV = \sum_{C_k \ge 0} \frac{C_k}{(1+r)^k}. \quad (2.3.1)$$

Для проекта с единственной начальной инвестицией имеем

$$PV = \sum_{k>0} \frac{C_k}{(1+r)^k}. \quad (2.3.2)$$

2.3.2. Чистый приведенный доход проекта

Приведенный доход инвестиционного проекта PV сам по себе редко используется для оценки инвестиционных проектов, поскольку он не учитывает информацию о планируемых затратах. Однако он используется при определении и расчете других, более информативных показателей.

Чистым приведенным доходом инвестиционного проекта NPV называют сумму дисконтированных в соответствии с процентной ставкой r к начальному моменту времени всех доходов и затрат проекта, т. е. всех C_k, $k \ge 0$:

$$NPV = \sum_{k \ge 0} \frac{C_k}{(1+r)^k}. \quad (2.3.3)$$

Иначе говоря, чистый приведенный доход инвестиционного проекта – это **современное** (т. е. современное началу проекта $k = 0$) значение всего потока платежей, соответствующего инвестиционному проекту. Для инвестиционного проекта с единственной начальной инвестицией I_0 имеем

$$NPV = PV + I_0\,. \quad (2.3.4)$$

Напомним, что $I_0 < 0$.

Отметим, что для инвестиционного проекта с несколькими затратами можно дисконтировать к начальному моменту времени все затраты и получить поток платежей с единственной начальной инвестицией I_0, эквивалентный исходному потоку.

Попросту говоря, NPV есть разность дисконтированных доходов и затрат.

Очевидно, что при $NPV > 0$ проект, может быть хорош, а при $NPV < 0$, он, скорее всего, плох.

2.3.3. Рентабельность (прибыльность) проекта

Индексом прибыльности (доходности, рентабельности, Profitability Index) PI называют величину

$$PI = \frac{\sum\limits_{C_k \ge 0} \frac{C_k}{(1+r)^k}}{\left| \sum\limits_{C_k < 0} \frac{C_k}{(1+r)^k} \right|}, \quad (2.3.5)$$

т. е. отношение приведенных доходов к приведенным расходам (взятым по модулю).

Для инвестиционного проекта с единственной начальной инвестицией I_0 имеем

$$PI = \frac{PV}{|I_0|}. \quad (2.3.6)$$

Из (2.3.4) следует, что

$$PI = 1 + \frac{NPV}{|I_0|}. \quad (2.3.7)$$

Очевидно, что при $PI > 1$ проект может быть хорош, а при $PI < 1$, он скорее всего, плох.

2.3.4. Срок окупаемости проекта

Пусть для инвестиционного проекта и процентной ставки $r \geq 0$ выполнено условие

$$NPV > 0. \quad (2.3.8)$$

Сроком окупаемости инвестиционного проекта при процентной ставке $r \geq 0$ (*PBP, DPBP,* discounted pay-back period) называют такое натуральное число n, что

$$\sum_0^{n-1} \frac{C_k}{(1+r)^k} < 0 \leq \sum_0^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k}. \quad (2.3.9)$$

Отдельно отметим понятие ***срока окупаемости инвестиционного проекта без учета процентной ставки***, что соответствует (2.3.9) при $r = 0$, т. е.

$$\sum_0^{n-1} C_k < 0 \leq \sum_0^{n} C_k. \quad (2.3.10)$$

Этим показателем достаточно часто пользуются; его также могут обозначать *PBP*.

Упражнение 2.3.1. Приведите пример инвестиционного проекта, для которого существует срок окупаемости инвестиционного проекта без учета процентной ставки, но при любом $r > 0$ не существует срока окупаемости инвестиционного проекта при процентной ставке r.

2.3.5. Внутренняя доходность проекта

Внутренняя доходность (внутренняя норма доходности, IRR) инвестиционного проекта – это внутренняя доходность потока платежей, соответствующего инвестиционному проекту, т. е. наименьший положительный корень (если он существует,) x уравнения

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{(1+x)^k} = 0, \qquad (2.3.11)$$

построенного для потока платежей с платежами C_k, соответствующего инвестиционному проекту.

Важное замечание 2.3.1. И с точки зрения математики (см. раздел 1.8), и с точки зрения экономики и финансов (см. раздел 1.7) корни уравнения (1.8.3), удовлетворяющие неравенству $-1 < x \leq 0$, также имеют смысл и могли бы рассматриваться в качестве *IRR*. Однако традиция требует положительности внутренней доходности *IRR* инвестиционного проекта, и мы не стали эту традицию нарушать.

Замечание 2.3.2. Если r – рыночная доходность (процентная ставка), то очевидно, что при $IRR > r$ проект может быть хорош, а при $IRR < r$ он, скорее всего, плох, поскольку доступны вклады по ставке r. При этом сама по себе внутренняя доходность *IRR* инвестиционного проекта никак не связана с действующей на рынке процентной ставкой r. Существуют модели, связывающие действующую на рынке процентную ставку r и модифицированную внутреннюю доходность *MIRR* инвестиционного проекта. Одной из таких моделей мы коснемся ниже.

Упражнение 2.3.2. Постройте теорию счетных потоков платежей и счетных инвестиционных проектов. Каковы возможные приложения этой теории?

Упражнение 2.3.3. Постройте теорию интегрируемых потоков платежей и интегрируемых инвестиционных проектов. Каковы возможные приложения этой теории?

2.3.6. Какими показателями пользоваться?

Какими показателями и как пользоваться в анализе инвестиционных проектов?

Сначала естественно отобрать проекты, которые подходят нам по размерам инвестиций, скажем, по величине I_0. При этом стоит учитывать возможности долевого участия. Затем стоит из отобранных проектов отобрать те, которые подходят по срокам окупаемости *DPBP, PBP,* вычисленным с дисконтированием и без него.

Теперь нам следует определиться с тем, кто мы такие. Если мы индивидуальные инвесторы, то нас, видимо, должен интересовать чистый приведенный доход *NPV* инвестиционного проекта, и нам стоит выбрать проект с наибольшим *NPV*. Если же мы выбираем проект для банка, то для нас важны такие показатели, как индекс прибыльности *PI* и внутренняя доходность *IRR*. Эти показатели примерно равноценны, банки предпочитают IRR, так как этот показатель позволяет прямо сравнить рассматриваемый проект с другими инструментами – кредитами, депозитами и пр. При этом *PI* можно использовать для проверки правильности результатов, полученных с помощью *IRR*.

Упражнение 2.3.4. Верно ли следующее утверждение: если *A* и *B* – два инвестиционных проекта, то из *PI(A) > PI(B)* следует *IRR(A) > IRR(B)*? Верно ли это утверждение при условии, что *A* и *B* – проекты с единственной начальной инвестицией каждый?

Важное замечание 2.3.3. Следует признать, что правовые, организационные, производственные и сбытовые аспекты подготовки и анализа инвестиционных проектов требуют гораздо бóльших усилий, нежели расчеты показателей по планируемым потокам платежей. Окончательный выбор инвестиционного проекта может быть основан не на рассчитанных показателях, а на совершенно других соображениях. Но это не означает, что такими расчетами можно пренебрегать. Отнюдь!

Упражнение 2.3.5. Найдите инвестиционные проекты строительства газопроводов «Сила Сибири» и «Северный поток-2» и рассчитайте для них вышеописанные показатели. Какой проект вам нравится больше и почему?

2.3.7. Любопытная информация

Вопрос о том, какой показатель в анализе инвестиционных проектов лучше, волновал светлые головы около ста лет. Возможно, на него совсем недавно ответил британский ученый Майк Осборн. Вот реферат его недавней работы:

«A resolution to the NPV–IRR debate? (Citations: 4)
Michael J. Osborne
Two criteria for choosing between capital investment projects are net present value (*NPV*) and internal rate of return (*IRR*). Sometimes they provide inconsistent rankings. This inconsistency sparked a debate about which criterion is better. The debate has lasted more than 100 years. This paper describes a new approach to the debate. The time value of money equation is a polynomial, and a polynomial of order n does not have a single root. It has n roots. The result of taking into account the n solutions for *IRR* is a new equation for *NPV* that suggests a resolution to the debate.
Journal: The Quarterly Review of Economics and Finance, vol. 50, no. 2, pp. 234–239, 2010».

И ее четкая интерпретация:

«…Osborne (2010) has derived the *NPV* of a project as a function of all (real-valued and complex-valued) roots of the *IRR* equation...» (Carlo Alberto Magni «Aggregate Return on Investment and Investment Decisions: A Cash-Flow Perspective»).

Майк Осборн не был одинок в своих исследованиях:

«...In the last ten years the emphasis was to uncover the functional relationship between *NPV* and *IRR* (Hazen (2003), Bosch, Serrats, and Tarrazon (2007), Magni (2010), Ben-Horin and Kroll (2010) and Osborne (2010), (2011)) and the meaning of *IRR*(Osborne (2011))...».

Moshe Ben-Horin «The Limited Relevance of the Multiple *IRR*s».

Вполне возможно, что даже в классической финансовой математике и по сей день существуют «белые пятна» и «черные дыры». Насколько они важны для финансового анализа и тем более для практики – отдельный вопрос.

Упражнение 2.3.6. Найдите где-нибудь вышеуказанные публикации и более современные публикации указанных авторов. Прочтите их на предмет обнаружения «белых пятен» и «черных дыр». Самостоятельно оцените важность результатов вышеуказанных публикаций для финансовой математики и для практики.

2.3.8. Точки Фишера

Пусть A и B – инвестиционные проекты с единственной начальной инвестицией каждый; такие проекты наиболее важны с практической точки зрения и наиболее просты для анализа. Рассмотрим для этих проектов их показатели *NPV* как функции $NPV_A(r)$ и $NPV_B(r)$ ставки r, рассматриваемой, как переменная, считая при этом, что $r \geq 0$. Эти функции будем называть *NPV*-профилями проектов. Поскольку A и B – инвестиционные проекты с единственной начальной инвестицией каждый, их *NPV*-профили – убывающие непрерывные функции, стремящиеся к отрицательному C_0 (у каждого проекта C_0, разумеется, свое) при r, стремящемся к $+\infty$. Если рассмотреть r в качестве абсциссы, а *NPV* – в качестве ординаты, то график *NPV*-профиля проекта пересечет ось абсцисс в точке, равной *IRR* проекта, поскольку *IRR* – это наименьший положительный корень уравнения вида

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{(1+x)^k} = 0, \qquad (2.3.12)$$

т. е. наименьший положительный корень уравнения вида $NPV(x) = 0$, разумеется, если такой корень существует.

Абсцисса r^* точки пересечения графиков функций $NPV_A(r)$ и $NPV_B(r)$, если такая точка существует, называется ***точкой Фишера*** пары инвестиционных проектов A и B (рис. 2.1).

Будем считать далее, что внутренние доходности IRR_A и IRR_B проектов A и B существуют и что $IRR_A < IRR_B$.

Очевидно, абсцисса r^* точки пересечения графиков не может лежать в отрезке $[IRR_A, IRR_B]$. Точки пересечения графиков, лежащие правее отрезка $[IRR_A, IRR_B]$, нас не интересуют, поскольку им соответствуют отрицательные значения функций $NPV_A(r)$ и $NPV_B(r)$. Отметим также, что мы не рассматриваем точки пересечения графиков с отрицательными абсциссами r^*.

Если $NPV_A(0) > NPV_B(0)$, то в силу условия $IRR_A < IRR_B$ и свойств функций $NPV_A(r)$ и $NPV_B(r)$, существует точки пересечения графиков $NPV_A(r)$ и $NPV_B(r)$, абсцисса r^* которой лежит в интервале $(0, IRR_A)$ и является точкой Фишера пары инвестиционных проектов A и B.

Если же $NPV_A(0) < NPV_B(0)$, то, как легко видеть, в интервале $(0, IRR_A)$ точки Фишера может не быть.

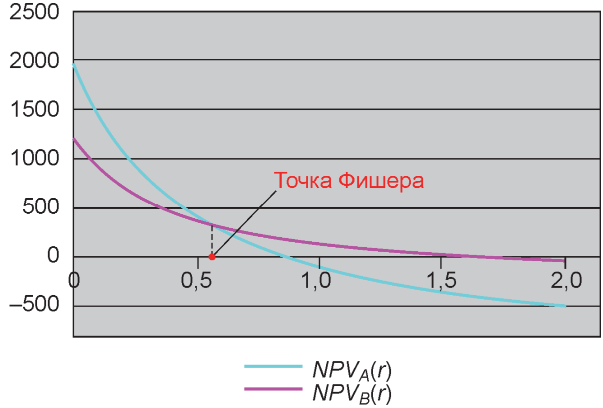


Рис. 2.1. Точка Фишера пары инвестиционных проектов A и B

Упражнение 2.3.7. Покажите, что точка Фишера пары инвестиционных проектов A и B, если она существует, равна корню уравнения внутренней доходности IRR для потока платежей D, получаемого как разность $D = A - B$ инвестиционных проектов A и B, т. е. $C_k(D) = C_k(A) - C_k(B)$, другими словами, есть корень уравнения.

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{C_k(A) - C_k(B)}{(1+x)^k} = 0. \qquad (2.3.13)$$

Упражнение 2.3.8. Постройте графики NPV-профилей и найдите точку Фишера для проектов $A = (-1000, 1000, 1000, 1000)$ и $B = (-100, 200, 400, 800)$.

Упражнение 2.3.9. Существуют ли пары инвестиционных проектов с единственной начальной инвестицией, для которых точка Фишера не единственна?

Упражнение 2.3.10. Покажите, что если точка Фишера пары инвестиционных проектов единственна, то слева от точки Фишера их показатели *NPV* и *IRR* не согласуются, а справа от точки Фишера они согласуются.

2.3.9. Еще одна характеристика инвестиционного проекта. Модифицированная внутренняя доходность проекта MIRR

При обсуждении показателя ***IRR*** и у профессионалов и у новичков часто возникает следующий вопрос: насколько правомерно в ситуации инвестиционного проекта приравнивать ставку, по которой происходит наращение, и ставку, по которой происходит дисконтирование? Если банк может полученные им платежи по кредитам снова отдавать взаймы примерно по той же ставке, то, скажем, строительная компания может не находиться в настолько же комфортных условиях. Эти соображения привели к появлению в финансовом анализе такой характеристики инвестиционного проекта как модифицированная внутренняя доходность проекта *MIRR*.

Для потока платежей с платежами C_k, соответствующего инвестиционному проекту, будем приводить расходы, т. е. C_k с отрицательными значениями, к начальному (нулевому) моменту времени по ставке r, а доходы, т. е. C_k с положительными значениями, к конечному моменту времени N по ставке v; здесь r – ставка, по которой происходит финансирование проекта, v – ставка, по которой возможно реинвестирование. Определим ***модифицированную внутреннюю доходность проекта MIRR*** равенством

$$(1+MIRR)^N = \frac{\sum\limits_{C_k \geq 0} C_k (1+v)^{N-k}}{\left| \sum\limits_{C_k < 0} \frac{C_k}{(1+r)^k} \right|}. \tag{2.3.14}$$

Модифицированная внутренняя доходность проекта *MIRR* позволяет более аккуратно, чем внутренняя доходность проекта *IRR,* учитывать условия, в которых предполагается осуществление проекта, *MIRR* проще вычисляется, а также проще интуитивно, чем *IRR*.

Некоторые профессионалы считают, что *NPV* более надежный на практике показатель, чем *IRR*, а *IRR* – более удобный показатель, чем *NPV*, поскольку позволяет наглядно сравнивать доходность инвестиционного проекта с доходностью депозита. При этом показатель *MIRR* оказывается «осторожнее» *IRR,* и таким же удобным, как *IRR* для сравнения с депозитами. Однако на практике показатель *MIRR* используется реже, чем *NPV* и *IRR*. Это может быть связано и с определенной консервативностью профессионального сообщества, и с тем, что ставка v, по которой возможно реинвестирование, для разных случаев может быть задана по-разному, скажем, как ставка по доступным депозитам в одном случае, и как *IRR* инвестиционного проекта в другом случае.

2.4. Облигации и их дюрации

Облигация – это долговая ценная бумага, по которой эмитент (компания или государство), выпустивший облигацию, обязуется выплатить инвестору (владельцу облигации) определенную сумму и определенный процент в будущем. Облигация удостоверяет право владельца облигации получить и обязательство эмитента облигации выплатить в определенные сроки номинальную стоимость облигации и проценты по ней.

Доход инвестора может складываться из двух составляющих. Во-первых, компания-эмитент обязуется производить выплаты с определенной периодичностью, часто всего один или два раза в год. Это так называемый доход по купонам, или купонный доход. Во-вторых, доход инвестора может складываться из разницы между ценой покупки облигации и ее номиналом, т. е. ценой погашения, выплачиваемой в установленный срок – так называемый срок погашения облигации. Такую разницу принято называть дисконтом, а доход – дисконтным.

В современной российской действительности облигации менее заметны, чем банковские кредиты и депозиты. Но на самом деле всё обстоит совсем не так, как в действительности! Крупнейшие заемщики и инвесторы – государства и крупные компании – предпочитают совершать операции займа или вклада именно в форме выпуска или покупки облигаций. Российская Федерация хранит существенную часть своих золотовалютных резервов в виде облигаций Казначейства США; целесообразность такой политики регулярно обсуждается в Государственной думе РФ (рис. 2.2).

Рис. 2.2. «Облегация или Аблигация?». Актриса Лариса Удовиченко в роли Маньки-Облигации в фильме «Место встречи изменить нельзя»

Упражнение 2.4.1. Каковы аргументы pro и contra (за и против) политики хранения существенной части золотовалютных резервов РФ в виде облигаций Казначейства США?

Для облигации с платежом R по купонам, выплачиваемым ежегодно, номинальной стоимостью облигации P, сроком n до погашения облигации при рыночной годовой процентной ставке i можно рассчитать текущую рыночную стоимость облигации по формуле:

$$A_n = R\frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^n}}{i} + \frac{P}{(1+i)^n}. \qquad (2.4.1)$$

Упражнение 2.4.2. Докажите формулу (2.4.1).

Упражнение 2.4.3. Выведите формулу, аналогичную (2.4.1), при выплате купонного дохода m раз в год.

Вы уже знаете, что на самом деле все обстоит совсем не так, как в действительности. Именно это происходит с формулой (2.4.1). Эта формула пригодна для безрисковых, абсолютно надежных облигаций. Если же на рынке присутствуют сомнения относительно готовности эмитента произвести платежи в срок, то они снижают реальную рыночную стоимость A_n облигации. Формула (2.4.1) в этом случае используется для расчета доходности i облигации по ее рыночной цене: эта доходность растет при увеличении риска. Подчеркнем, что работая с понятием облигации, мы имеем дело по меньшей мере с тремя видами доходности: а) с рыночной годовой процентной ставкой – «доходностью среды» r; б) с «доходностью к погашению» i облигации, которая получается как внутренняя доходность потока платежей, составленного из платежа покупки облигации и выплат по ней; в) с доходностью (в процентах годовых), порожденной некоторой парой сделок – купли и последующей продажи облигации по ее рыночной стоимости в соответствующие моменты времени. При анализе облигаций используются и другие виды доходности. Однако мы не будем их обсуждать, а обсудим влияние рыночной годовой процентной ставки на рыночную стоимость облигации.

Рыночная стоимость облигации меняется при изменении рыночной годовой процентной ставки r. Можно догадаться, что при росте r стоимость облигации будет уменьшаться, но мы установим это с помощью выкладки. Для оценки изменения этой рыночной стоимости облигации будем рассматривать поток платежей и его настоящее значение pv, равное текущей стоимости облигации. Таким образом, мы рассматриваем безрисковые, абсолютно надежные облигаций.

Обратимся сначала к простейшему случаю. Поток платежей с единственным ненулевым платежом C в точке 1 при рыночной годовой процентной ставке r есть поток выплат дохода облигации без купонного дохода по цене погашения C со сроком погашения 1, текущий момент времени – нулевой. Тогда

$$pv = \frac{C}{(1+r)}. \tag{2.4.2}$$

Рассматривая pv как функцию от r, получаем, что

$$pv'_r(r) = \left(\frac{c}{1+r}\right)'_r = -\frac{c}{(1+r)^2} = -\frac{pv}{1+r}. \tag{2.4.3}$$

Тогда при изменении ставки r на Δr значение pv изменится на Δpv и

$$\Delta pv \approx pv'_r(r)\Delta r = -\frac{pv}{1+r}\Delta r. \tag{2.4.4}$$

Таким образом, в рассмотренном простейшем случае при росте ставки r рыночная стоимость облигации снижается, а при снижении ставки r рыночная стоимость облигации растет.

Далее обратимся к чуть более сложному случаю. Поток платежей с единственным ненулевым платежом C в точке $T > 0$ при рыночной годовой процентной ставке r есть поток выплат дохода облигации без купонного дохода по цене погашения C со сроком погашения T, текущий момент времени – нулевой. Тогда

$$pv = \frac{C}{(1+r)^T} = C(1+r)^{-T}. \tag{2.4.5}$$

Рассматривая pv как функцию от r, получаем, что

$$pv'_r(r) = -TC(1+r)^{-T-1} = -\frac{T}{1+r}C(1+r)^{-T} = -T\frac{pv}{1+r}. \tag{2.4.6}$$

Тогда при изменении ставки r на Δr значение pv изменится на Δpv и

$$\Delta pv \approx pv'_r(r)\Delta r = -T\frac{pv}{1+r}\Delta r. \tag{2.4.7}$$

Таким образом, в рассмотренном случае при росте ставки r рыночная стоимость облигации снижается пропорционально текущему значению стоимости pv и времени до погашения T, а при снижении ставки r рыночная стоимость облигации растет пропорционально (в первом приближении) текущему значению стоимости pv и времени до погашения T.

Перейдем теперь к более общему случаю.

Пусть поток платежей $C(t)$ с носителем, содержащимся во множестве точек $\{t_1, \dots t_N\}$, где все $t_k > t_0$, все $C(t_k) \geq 0$ и процентная ставка r таковы, что настоящее (т. е. современное) приведенное в точке t_0 значение pv потока $C(t)$ отлично от ноля. ***Дюрацией в точке t_0 потока платежей $C(t)$*** называют величину

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{N} C(t_k)(t_k - t_0)(1+r)^{(t_0 - t_k)}}{pv} \tag{2.4.8}$$

или, что очевидно, эквивалентно

$$D=\frac{1}{pv}\sum_{k=1}^{N}\frac{C(t_k)(t_k-t_0)}{(1+r)^{(t_k-t_0)}}. \qquad (2.4.9)$$

Таким образом, дюрация потока платежей – это «средневзвешенный» (с учетом объемов платежей и дисконтирования) срок платежей потока, удовлетворяющий уравнению

$$Dpv=\sum_{k=1}^{N}\frac{C(t_k)}{(1+r)^{(t_k-t_0)}}(t_k-t_0). \qquad (2.4.10)$$

Обычно t_0 – это настоящий момент времени.

Условие

$$pv\neq 0 \qquad (2.4.11)$$

легко обеспечивается требованием, чтобы среди платежей $C(t_k)$ были отличные от ноля и чтобы все такие платежи $C(t_k)$ были одного знака.

Важным примером выполнения указанных условий является поток платежей по уже купленной в момент времени $\tau\leq t_0$ облигации. Платежи $C(t_k)$ при $t_k<T$ – это купонные платежи, а $C(T)$ – цена погашения, возможно, вместе с последним купонным платежом.

Пусть для потока $C(t)$ выполнены указанные условия. Из

$$S=\sum_{k=0}^{N}c_k(1+r)^{(T-t_k)} \qquad (2.4.12)$$

рассматривая pv как функцию от r, получаем с учетом равенства $C(t_0)=0$, что

$$pv(r)=\sum_{k=1}^{N}c(t_k)(1+r)^{(t_0-t_k)}. \qquad (2.4.13)$$

Отсюда и из (2.4.8) получим, разделив и умножив на pv, вынося за знак суммы $(1+r)^{-1}$,

$$pv'(r)=\sum_{k=1}^{N}(t_0-t_k)c(t_k)(1+r)^{(t_0-t_k-1)}=-D\frac{pv}{1+r}. \qquad (2.4.14)$$

Поскольку при $r>-1$ функция $pv(r)$ – гладкая, имеем

$$\Delta pv \backsimeq pv'(r)\Delta r \qquad (2.4.15)$$

с точностью до слагаемых второй и выше степени относительно Δr.

Из (2.4.14) и (2.4.15) получаем

$$\Delta pv\backsimeq D\frac{pv(r)}{1+r}\Delta r. \qquad (2.4.16)$$

а из (2.4.14)

$$\frac{pv'(r)}{pv(r)}=-\frac{D}{1+r}, \qquad (2.4.17)$$

что можно переписать как

$$d(\ln pv)=-\frac{D}{1+r}. \qquad (2.4.18)$$

Обратите внимание, как естественно появляются экспонента и логарифм в задачах финансовой математики.

Из вида (2.4.13) функции $pv(r)$ следует, что эта функция монотонно убывает с ростом r.

Равенство (2.4.16) позволяет оценить изменение стоимости облигации при изменении процентной ставки r. Можно задаться вопросом: а зачем это нужно оценивать $\Delta pv(r)$ по Δr, когда легко можно непосредственно рассчитать $pv(r)$ при любых значениях r, скажем, с помощью электронных таблиц? Но польза формулы (2.4.16) и ей подобных состоит в том, что они позволяют финансисту понять, как будет изменяться стоимость облигации, лишь на основе уже проведенных ранее расчетов. Таким образом, формулы (2.4.16) и ей подобные дают качественное понимание процесса изменения стоимости облигации, а не просто позволяют получить приближенный численный результат.

Наряду с дюрацией рассматривают также ***модифицированную дюрацию потока платежей***, определяемую формулой

$$MD = \frac{D}{1+r}. \tag{2.4.19}$$

Тогда из (2.4.16) получаем формулу

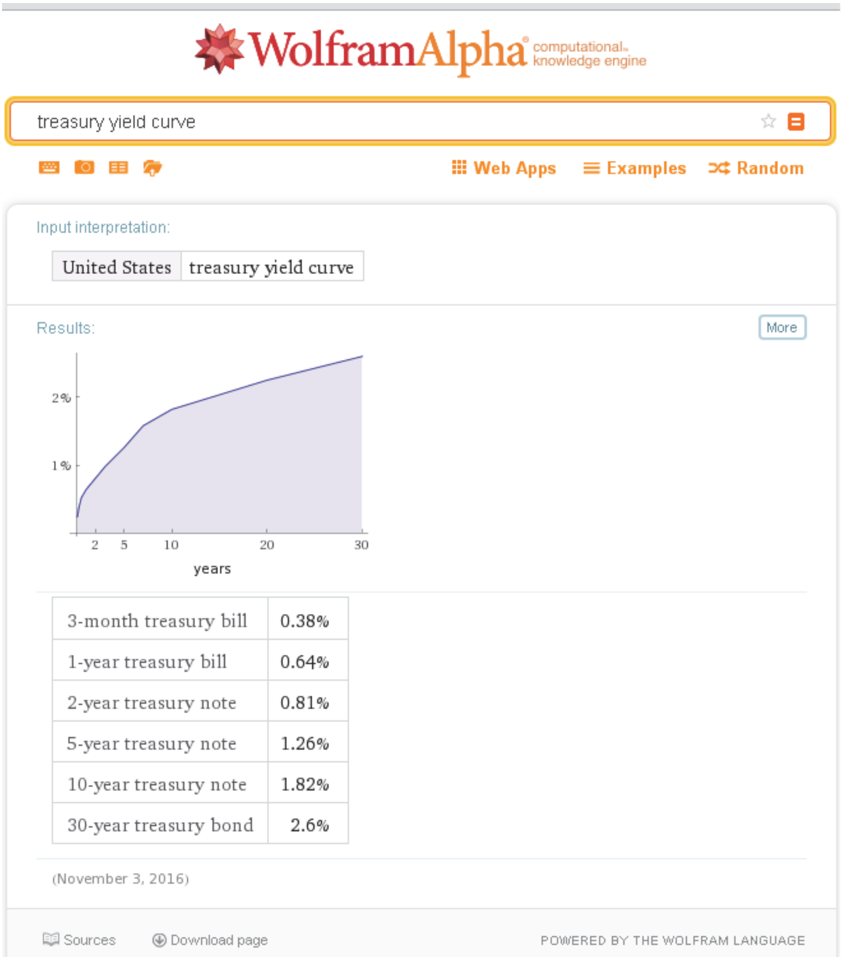
$$\frac{\Delta pv}{pv(r)} \backsimeq -MD\Delta r, \tag{2.4.20}$$

которая еще проще для восприятия и практического применения финансистами.

Упражнение 2.4.4. Дайте объяснение увеличению доходности облигаций казначейства США при увеличении срока погашения (рис. 2.3).

Указание 2.4.4. Объяснения могут быть такими: а) при увеличении срока погашения растет риск, поэтому снижается цена облигации, поэтому растет доходность; б) уровни ставок по облигациям, банковским вкладам и займам сейчас близки к исторически минимальным, поэтому в долгосрочной перспективе рынок ожидает роста всех ставок, а следовательно, согласно формулам (2.4.16) или (2.4.19), снижения цен на облигации, поэтому ожидает роста их доходностей; в) возможно совместное действие вышеуказанных причин.

Облигации относятся к ценным бумагам с фиксированным доходом; при этом ими торгуют на финансовых рынках по рыночным (а значит, плавающим) ценам. Соответственно в анализе облигаций интенсивно используются как классическая, так и стохастическая финансовая математика.



3-month treasury bill	0.38%
1-year treasury bill	0.64%
2-year treasury note	0.81%
5-year treasury note	1.26%
10-year treasury note	1.82%
30-year treasury bond	2.6%

Рис. 2.3. Кривая доходности облигаций казначейства США

Упражнение 2.4.5. Найдите в интернете данные по российским государственным облигациям, вычислите их дюрации и доходности, постройте кривую зависимости доходности от дюрации.

Упражнение 2.4.6. Проверьте, что дюрация портфеля, состоящего из нескольких облигаций, равняется «средневзвешенной» дюраций облигаций, составляющих портфель.

Упражнение 2.4.7. Прочтите книги «Неравенства» Г. Г. Харди, Дж. Е. Литлвуда и Г. Г. Полиа, и «Неравенства» Э. Беккенбаха и Р. Беллмана. Какие из приведенных в этих книгах неравенств можно применить к дюрациям?

Важное упражнение 2.4.8. Прочтите первую часть книги В. И. Малыхина «Финансовая математика» и выполните все упражнения, не требующие численных расчетов.

(При первом чтении упражнения 2.4.7 и 2.4.8 можно пропустить.)

2.5. Время – деньги!

Мы уже писали, что финансовая математика занимается исследованием некоторых аспектов известного тезиса «Время – деньги!». Пришло время остановиться на этих аспектах несколько более подробно.

Как известно, в результате деятельности людей и групп людей капитал S за время ΔT может быть увеличен на $\Delta S > 0$. Это привело к возникновению финансовых рынков, где доступны как займы, так и вклады. Такие операции проводятся по различным ставкам, причем ставки по займам обычно несколько выше ставок по вкладам. Однако все эти ставки группируются вокруг некоторого среднего значения. Это и приводит к появлению моделей финансовой математики, в которых на основе некоторой ставки r, по которой доступны как займы, так и вклады, вводится понятие эквивалентности денежных платежей, производимых в разные моменты времени.

Поскольку первоначально практические расчеты проводились лишь по отдельности для займов и вкладов (по разным ставкам), такие простые и стройные модели не сильно противоречили банковской практике. При анализе инвестиционных проектов разница между ставками заимствования и инвестиций стала представляться существенной для анализа. Это, с одной стороны, привело к появлению в финансовом анализе такого показателя, как *MIRR*, а с другой стороны, к построению моделей финансовой математики на основе интервальной арифметики. Отметим, что эффективное применение интервальной арифметики возможно, по-видимому, только на основе компьютерных технологий, и что этот подход пока не стал общепринятым.

Среднее значение ставок по займам и вкладам и его «идеализация» r являются показателями темпов развития экономики в среднем. Это верно лишь для мировой экономики в целом, а также для стран, чья доля в мировой экономике существенна. В отдельных странах значения ставок по займам и вкладам могут сильно отличаться друг от друга и не соответствовать темпам развития. Так для ситуации гиперинфляции характерно падение экономики.

В финансовом анализе в качестве значений ставок по займам и вкладам по отдельности, естественно, принимают их фактические значения. Там, где приходится рассматривать заимствования и инвестиции совместно, в качестве значения r по стране можно принять значение какой- либо из ставок, устанавливаемых Центральным Банком страны для регулирования деятельности финансовых рынков.

Роль значения ставки r и ставок по займам и вкладам велика, поскольку с ними сравнивают доходности по каким-либо операциям, деятельности, проектам и т. п. Отметим, что в 2.5 мы имеем в виду ставки и доходности в процентах годовых.

3. ФИНАНСОВЫЕ РАСЧЕТЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦАХ И БЕЗ НИХ, ИЛИ КОМПЬЮТЕРНЫЕ АСПЕКТЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Перейдем к освоению методики проведения компьютерными средствами финансовых расчетов, основанных на классической финансовой математике. После основополагающих замечаний мы рассмотрим методику подробно на простейшей задаче. Далее для решения излагаемой методикой будут предложены другие задачи, причем их сложность и требуемая самостоятельность в их решении будут возрастать. Отметим, что излагаемая методика является наиболее надежной из известных нам, а ее составляющие – две вполне традиционные методики финансовых расчетов.

3.1. Парадигма. Microsoft Excel рулит

Среди программ, используемых для финансовых расчетов, программа Microsoft Excel не просто является лидером, но занимает исключительное место. Видимо, нет компании или организации, где Microsoft Excel или ее клоны не применялись бы для деловых расчетов, так же как нет финансового специалиста, который в своей работе не использовал бы ее или ее клоны. И в расчетах, связанных с финансовой математикой, программа Microsoft Excel занимает исключительное место. Немаловажно здесь то, что в Microsoft Excel и ее клоны встроено большое количество финансовых функций, облегчающих проведение практических финансовых расчетов.

Нужно отметить, что в состав современных версий большинства математических программ (Mathematica, Maple, MathCAD, MATLAB) включены финансовые функции или финансовые пакеты. Упомянем также специализированную Wolfram Finance Platform, в основе которой лежит Mathematica. Однако вся мощь математических программ всерьез начинает проявляться в задачах стохастической финансовой математики.

Что же касается практических расчетов, связанных с классической финансовой математикой, то их обычно проводят либо с помощью Microsoft Excel или ее клонов, либо с помощью программ, специально разработанных для конкретной компании, возможно, конкретного сайта. Разумеется, находясь снаружи вышеупомянутой конкретной компании, мы с помощью Microsoft Excel или ее клонов сможем полноценно проверить представленные компанией результаты расчетов.

Упражнение 3.1.1. Просмотрите список встроенных финансовых функций программы Microsoft Excel или доступного вам клона, скажем LibreOffice Calc.

Упражнение 3.1.2. Просмотрите список встроенных финансовых функций программы Google Sheets.

Упражнение 3.1.3. Просмотрите список встроенных финансовых функций доступной вам программы компьютерной математики.

Упражнение 3.1.4. Найдите на своем компьютере (примерно по адресу C:\Program Files\Microsoft Office\Office12\1049\FUNCS.XLS) или в интернете файл FUNCS.XLS, или FUNCS.XLSX, содержащий соответствия между русскими и английскими именами встроенных функций в Microsoft Excel. Иметь такой файл полезно и в том случае, если вы пользуетесь клоном Microsoft Excel. Дело в том, что имена встроенных функций в клоне могут быть английскими (вне зависимости от используемого в клоне языка) и близкими к английским именам функций в Microsoft Excel. Так что вас могут интересовать английские аналоги имен функций Microsoft Excel с русскими именами.

3.2. Концепция. Проверка дублированием

Важный и необходимый этап проведения любых расчетов – проверка результатов. Эффективным методом такой проверки является дублирование расчетов. Как известно, дублирование элементов – мощное средство повышения надежности любой системы. И при проведении расчетов дублирование эффективно. В аудитории и учебной лаборатории студенты осуществляют дублирование, сравнивая свои результаты расчетов с результатами соседа или заглядывая в ответы в задачнике. На рабочем месте предусмотрительный руководитель поручает ответственный сложный расчет нескольким исполнителям и сравнивает результаты. Но что может сделать работник, которому нужно провести пусть несложный, но новый для него расчет, если он хочет получить верный результат? Ответ таков: он может продублировать расчет, сделав его еще одним методом. Совпадение полученных двумя разными методами результатов обнадеживает и воодушевляет проводящего расчеты, в то время как несовпадение говорит о том, что в ситуации следует разобраться.

Строго говоря, совпадение полученных двумя разными методами результатов не гарантирует правильность результатов, но часто сопутствует такой правильности, скажем в случае, когда математическая задача имеет единственное решение. Отметим, что многие финансовые расчеты именно таковы.

Соответственно, разные результаты чаще всего свидетельствуют об ошибке. Однако если математическая задача имеет несколько решений, разные методы могут находить разные решения. Также если решения были получены приближенными методами, они могут различаться, будучи различными приближениями к одному и тому же решению, пусть и единственному. Повышение точности расчетов в таких случаях обычно решает проблему.

Безусловно, методы решения должны быть разными. Если решить задачу параллельно в Microsoft Excel и ее клоне, скажем, с помощью аналогичных финансовых функций с одинаковым синтаксисом, то польза от такого дублирования будет невелика. Далее мы будем решать задачи из классической финансовой математики, как правило, двумя способами:

1) исходя из уравнения – математической модели данной задачи;
2) используя встроенные финансовые функции Microsoft Excel или ее клонов.

При этом в данном тексте мы будем использовать для обоих методов программу Microsoft Excel, имея в виду, что читатель при необходимости самостоятельно перейдет к имеющемуся у него клону, а также что он при желании самостоятельно составит и решит нужное уравнение в любимом пакете компьютерной математики (Mathematica, Maple, Maxima и т. п.).

Такая проверка дублированием вырабатывает в учащемся больше, чем просто привычку проверки, – она вырабатывает культуру проверки расчетов, культуру, во многом утраченную. Об этой утрате можно прочесть грустную историю по адресу http://www.rg.ru/2010/12/20/glonass.html в материале «Ошибка конструктора», повествующем о том, как из-за ошибки в формуле расчета полторы тонны лишнего горючего оказалось в топливных баках ракеты, и три космических аппарата «Глонасс-М» упали в акваторию Тихого океана. Ущерб от неудачного запуска трех навигационных спутников «Глонасс-М» составил несколько миллиардов рублей.

Финансовые расчеты обычно проще, чем расчеты в области ракетных технологий. Однако цена ошибки в финансовых расчетах измеряется деньгами чаще, чем в ракетных технологиях. Поэтому культура проверки расчетов в области финансов очень важна.

Упражнение 3.2.1. Объясните на названиях разделов 3.1 и 3.2 смысл терминов «парадигма» и «концепция».

3.3. Решение простейшей задачи. Расчеты по вкладам

Для демонстрации методики рассмотрим ее на простейшей (в том смысле, что проще трудно выдумать) задаче.

Упражнение 3.3.1. Определить, какой вклад размером P следует положить на депозит, чтобы через n лет на счете оказалась сумма S при номинальной ставке $r_{ном}$ и начислении процентов m раз в год. Решить задачу при следующих числовых значениях (табл. 3.3.1):

Таблица 3.3.1

S	$r_{ном}$ %	n	m
44 000	16,5	3	2

Решение.

Скопируем таблицу в MS Excel (или в клон MS Excel) и добавим два столбца с заголовками P1 и P2. Проследите, чтобы в записи десятичной дроби использовался именно тот десятичный разделитель (запятая или точка), который вы используете в MS Excel или в клоне. Получим что-то вроде этого (рис. 3.3.1):

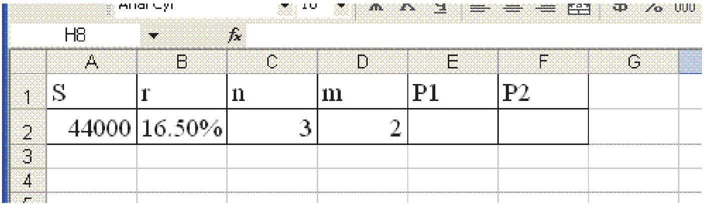


Рис. 3.3.1

Сначала решим задачку, исходя из уравнения математической модели. Очевидно, в соответствии с разделом 1.5, формулой (1.5.7) имеем

$$S = P(1 + r_{ном} / m)^{(nm)}, \qquad (3.3.1)$$

откуда

$$P = S/(1 + r_{ном} / m)^{(nm)}. \qquad (3.3.2)$$

Введем в ячейку E2 формулу для вычисления P (рис. 3.3.2):

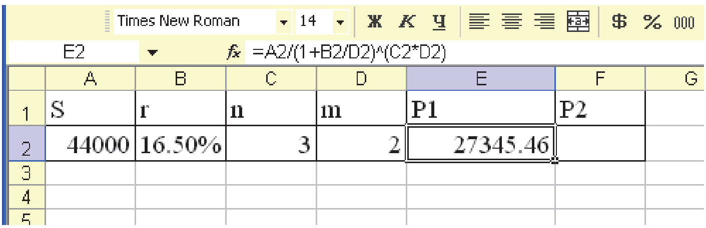


Рис. 3.3.2

При этом формула отображается в поле формул (рядом с кнопкой f_x), а значение – в ячейке E2.

Адреса ячеек, содержащих значения аргументов в формуле, следует отнюдь не набирать с клавиатуры, а выбирать мышкой. Возможно, вам придется добавить или уменьшить разрядность в ячейке с результатом.

Решение получено.

Теперь решим задачу с помощью встроенной функции ПС (ставка;число_периодов;выплата;бз;тип) русскоязычной электронной таблицы MS Excel или с помощью соответствующей встроенной функции PV (rate,nper,pmt,fv,type) англоязычной электронной таблицы MS Excel или какого-либо клона MS Excel.

Установим курсор в ячейку F2 и нажмем на кнопку f_x мастера функций. В открывшемся окне «Шаг 1 из 2» мастера функций выберем категорию «Финансовые», а затем функцию ПС (рис. 3.3.3). Внимательно читаем написанную информацию и более-менее убеждаемся, что функция ПС – то, что нам нужно. Нажав на гиперссылку «Справка по этой функции», читаем справку по этой функции и окончательно убеждаемся, что функция ПС – то, что нам нужно.

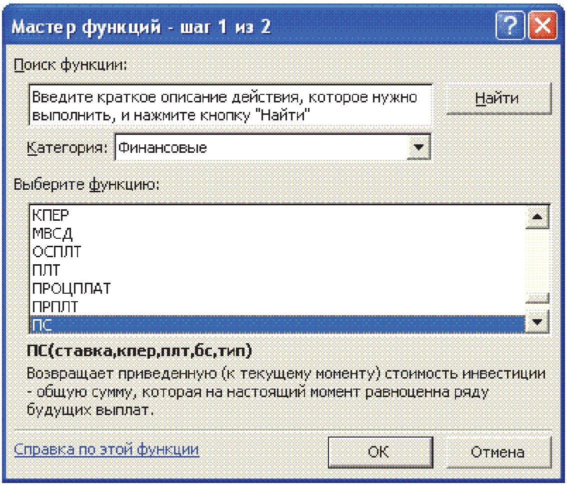


Рис. 3.3.3

Нажимаем на кнопку «ОК» и переходим к окну «Аргументы функции». Внимательно читаем написанную информацию и понимаем, что в поле «Ставка» следует задать значение $r_{ном}/m$. Адреса ячеек, содержащих значения исходных данных, мы укажем, выбирая нужные ячейки мышкой, а знак операции наберем с клавиатуры. Затем переходим к следующему полю с помощью курсора или клавиши «**Tab**».

Так мы делаем для каждого аргумента функции. Получим (рис. 3.3.4):

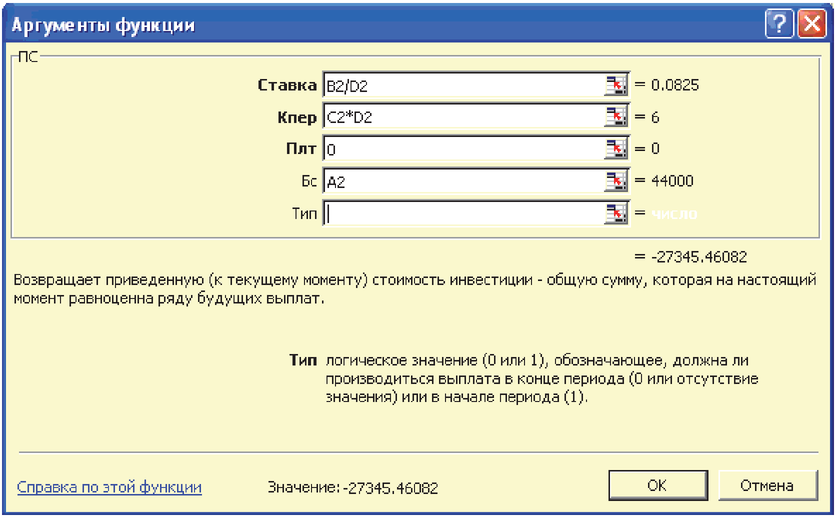


Рис. 3.3.4

В поле «Плт» задан 0, так как промежуточных выплат или дополнительных вкладов не производится. В поле «Тип» значение можно не задавать по той же причине. Обратите внимание на предварительный результат в строке под полями аргументов (справа) и в нижней строке окна. Нажав «ОК», получим результат в таблице (рис. 3.3.5):

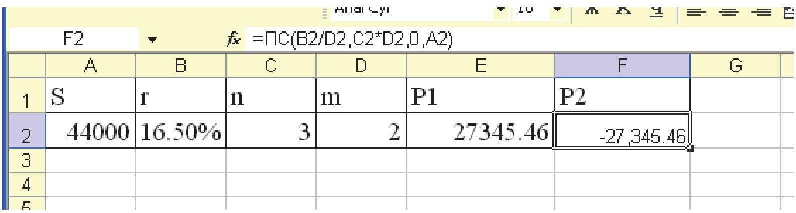


Рис. 3.3.5

Заметьте, в поле формул (рядом с кнопкой f_x) видна итоговая формула.

Отрицательный результат в ячейке F2 связан с тем, что, как было сказано в разделе 1.4, MS Excel и ее клоны учитывают направления платежей.

Полученный вариант результата соответствует «позиции вкладчика».

Если вам не нравится отрицательный результат, то вы можете учесть направление платежа, задавая аргументы функций, в данном случае аргумент «Бс» (рис. 3.3.6):

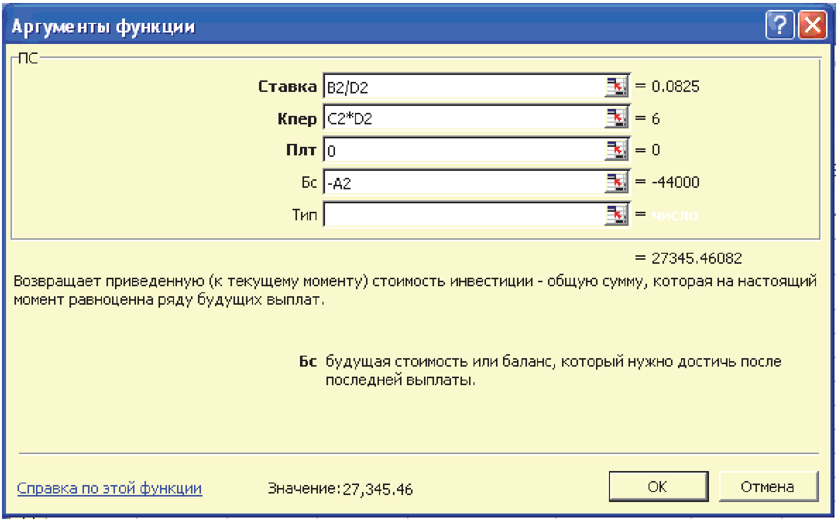


Рис. 3.3.6

Этот вариант соответствует «позиции банка». Отметим, что детали аналогичного процесса в клонах MS Excel могут отличаться.

Итак, мы решили задачку двумя разными методами, и полученные результаты совпали. Это позволяет надеяться, что мы все сделали правильно. В данном случае решение с помощью встроенной функции оказалось несколько сложнее, чем решение, непосредственно основанное на уравнении математической модели. Однако во многих более сложных случаях дело обстоит как раз наоборот.

Для закрепления навыка решим эту же задачу с другими числовыми данными.

Упражнение 3.3.2. В табл. 3.3.2 каждая строка – вариант данных для расчета. Определите, какой вклад размером P следует положить на депозит, чтобы через n лет на счете оказалась сумма S при номинальной ставке r и начислении процентов m раз в год. Решите задачу при следующих числовых значениях:

Таблица 3.3.2

S	$r_{ном}$, %	n	m
2000	18	1	12
50	10	3	1
4000	16	2	2
10 000	7	5	2
40 000	15	7	2

Упражнение 3.3.3. Задайте самостоятельно больше данных, так чтобы получить 12 строк в таблице. Можете ли вы решить все эти задачи двумя способами так, чтобы на решение одного примера каждым способом уходило меньше секунды? Подготовительная работа не в счет.

Указание 3.3.3.1: Используйте полученные решения упражнения 3.3.1 или упражнения 3.3.2 и «протащите» их.

Упражнение 3.3.4. В условиях упражнения 3.3.1 и 3.3.2 определите эффективную ставку $r_{эф}$.

Указание 3.3.4.1: Для «аналитического» решения воспользуйтесь выкладкой:

$$P\left(1+r_{эф}\right)^n = S,$$

$$r_{эф} = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(1+\frac{r_{ном}}{m}\right)^m - 1. \qquad (3.3.3)$$

Указание 3.3.4.2. Для решения с помощью встроенной функции можно использовать функцию EFFECT (nominal_rate, nper) или ЭФФЕКТ (номинальная_ставка; число_периодов), электронной таблицы MS Excel и ее клонов.

Упражнение 3.3.5. Рассчитайте номинальную годовую процентную ставку $r_{ном}$ по вкладу размером P, если за n лет сумма возросла до S при начислении процентов m раз в год (табл. 3.3.3).

Таблица 3.3.3

PS	*S*	*n*	*m*
100 000	1 100 000	13	4

Указание 3.3.5.1:

$$P\left(1+\frac{r_{ном}}{m}\right)^{mn} = S, \quad r_{ном} = m\left(\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right). \qquad (3.3.4)$$

Указание 3.3.5.2: Можно использовать функцию RATE (nper,pmt;pv;fv;type,guess), или СТАВКА (кпер;выплата;нз;бс;тип;предположение), электронной таблицы MS Excel и ее клонов.

Можно генерировать новые данные в условиях предыдущего упражнения из табл. 3.3.4, используя для определения значений M и N различные даты следующим образом: если у решающего задачу день рождения 13-го апреля, то M = 4 и N = 13, так что получаем табл. 3.3.5.

Таблица 3.3.4

P	S	n	m
M*100 000	MN*100 000	N	M

Таблица 3.3.5

P	S	n	m
400 000	5 200 000	13	4

Упражнение 3.3.6. Сгенерируйте из табл. 3.3.4 несколько вариантов табличных данных вышеописанным способом и выполните задание упражнения 3.3.5 для полученных вариантов данных.

Замечание 3.3.6.1. Не всегда такой способ генерации данных для упражнений приводит к разрешимым задачам. Стоит отметить, что и в жизни не все задачи разрешимы. Но в данном случае (табл. 3.3.4) всё в полном порядке.

3.4. Расчеты по ссудам

Здесь задачи несколько сложнее.

В нижеследующей табл. 3.4.1 каждая строка представляет собой отдельный набор данных для упражнения 3.3.7.

Упражнение 3.4.1. Ссуда размером P погашается платежами размера R при номинальной ставке i в течение n лет m раз в год. Определите значение величины, отсутствующее в строке. (Например, определите n по известным $P, R, i, m,$ или же R по известным P, n, i, m в зависимости от информации в конкретной строке.) В первой строке даны все данные для самопроверки. Данные в строках, содержащих символы M и N, сгенерируйте, как описано выше (см. упражнение 3.3.6).

Разъяснение 3.4.1.1. Здесь i – то же, что и $r_{ном}$ в разделе 1.5.

Таблица 3.4.1

P	R	i, %	m	n
5000	141,7	16	12	4
	550	20	1	8
2000		18	1	12
2000	417	18	1	
2000	440		1	10
	15	20	3	6
50		16	3	1
50	17,8	10	3	
50	10		4	3
	1400	16	2	2
4000		14	2	3

4000	1207	16	2	
4000	1500		2	2
	20*MN	(24/M)	M	N
10 000*M	30*M	(12/M)	M	
10 000*M		(36/M)	M	N
10 000*M	20*MN		M	N

Указание 3.4.1. К аналитическому решению упражнения 3.4.1 (без встроенных функций): вычислим будущее (т. е. приведенное к моменту последнего платежа и притом учитывающее последний платеж) значение размера ссуды P:

$$P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}.$$

Оно равняется сумме платежей, приведенных к моменту последнего платежа, т. е.

$$\sum_{k=0}^{mn-1} R\left(1+\frac{i}{m}\right)^{k},$$

т. е.

$$P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} = \sum_{k=0}^{mn-1} R\left(1+\frac{i}{m}\right)^{k}. \tag{3.4.1}$$

Обозначим

$$a=\left(1+\frac{i}{m}\right). \tag{3.4.2}$$

и запишем (3.4.1) как

$$Pa^{mn} = \sum_{k=0}^{mn-1} Ra^{k}. \tag{3.4.3}$$

Правую часть в (3.4.3) вычисляем как сумму конечного числа членов геометрической прогрессии. Получаем

$$Pa^{mn} = R\left(\frac{a^{mn}-1}{a-1}\right). \tag{3.4.4}$$

Уравнение (3.4.4) легко решить относительно P, если известны все другие параметры. Это же верно для R. Относительно n при известных остальных значениях уравнение (3.3.8) решаем следующим образом: обозначим

$$x = a^{mn}, \tag{3.4.5}$$

тогда уравнение (3.4.4) дает уравнение

$$Px = R\left(\frac{x-1}{a-1}\right), \tag{3.4.6}$$

которое легко решить относительно x. Подставим найденное значение x и известные значения a и m в (3.4.5) и найдем n логарифмированием

$$n = \frac{\ln x}{m \ln a}. \qquad (3.4.7)$$

Указание 3.4.2 к численно-аналитическому решению упражнения 3.4.1 (тоже без встроенных функций): пусть теперь неизвестным в условиях упражнения 3.4.1 является i. К сожалению, решить такую задачу аналитически легко только в простейших случаях. Но, к счастью, есть численно-аналитический метод, заключающийся в приближенном численном решении уравнения математической модели относительно i. Сразу отметим, что этим методом можно решать уравнения математической модели относительно любого неизвестного из его параметров, разумеется, при известных остальных.

Рассмотрим уравнение (3.4.1) в исходном или в свернутом виде:

$$P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} = R\left(\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)-1}\right). \qquad (3.4.8)$$

Перенесем левую часть в правую, получим уравнение:

$$P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} - R\left(\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)-1}\right) = 0. \qquad (3.4.9)$$

Обозначим его левую часть через $f(i)$. Уравнения вида

$$f(x) = 0 \qquad (3.4.10)$$

легко решать численно в любом пакете компьютерной математики (Mathematica, Maple, Maxima и т. п.).

Есть средство численного решения таких уравнений и в Microsoft Excel, и ее клонах. Это средство называется «подбор параметра». Собственно, тем, кто знаком со средством «подбор параметра» или собирается решать уравнения (3.4.9) в пакете компьютерной математики, все уже ясно и им можно переходить к решению конкретных примеров.

К сожалению, большинство осваивавших Microsoft Excel в школе и в университете, не знакомы с «подбором параметра». Именно для них мы и даем следующее.

Указание 3.4.3. Средство Microsoft Excel «подбор параметра». Найдите в поисковой системе Google понятное изложение «Microsoft Excel подбор параметра» и разберитесь уже за 5 – максимум 15 минут!

А вот беглое напоминание о том, как пользоваться «подбором параметра».

Посмотрим, как решать уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$ этим методом. Наберем в ячейках A1 и B1 заголовки x и f, соответственно, а в ячейках B2 и A2 формулу левой части уравнения и какое-то начальное приближение к корню, скажем 0. Теперь выберем пункт меню «Сервис» → «Подбор параметра». Появится окно «Подбор параметра» с тремя полями, которые мы заполним так:

– в поле «Установить в ячейке» выберем ячейку B2, содержащую формулу левой части уравнения;

– в поле «Значение» введем с клавиатуры 0 – значение правой части уравнения;

– в поле «Изменяя значение ячейке» выберем ячейку A2, содержащую значение переменной.

Полученное изображено на рис. 3.4.1. Нажав «ОК», получим результат, изображенный на рис. 3.4.2, т. е. приближенные значения корня уравнения, равного единице, и нулевого значения правой части. Разумеется, точность решения может быть повышена.

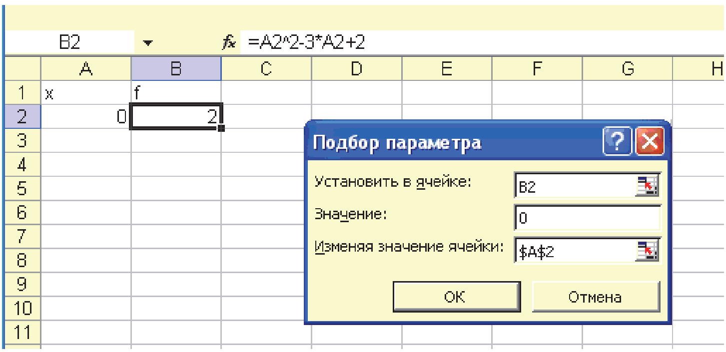


Рис. 3.4.1

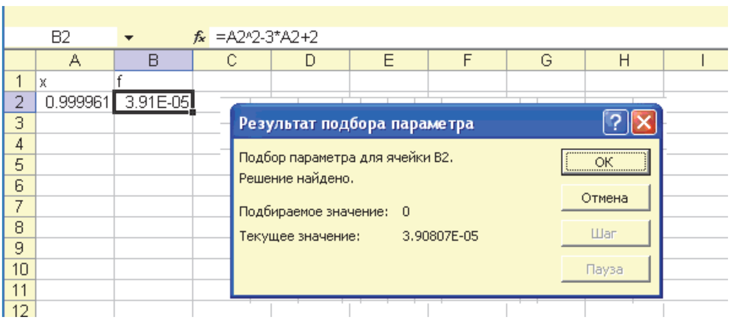


Рис. 3.4.2

Второй корень рассмотренного уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ найдите «подбором параметра» самостоятельно, задав иное начальное приближение, скажем 5.

Теперь переходите к решению уравнений (3.4.9) для конкретных данных из упражнения 3.4.1 и решите их все.

Указание 3.4.4 к решению упражнения 3.4.1 с применением встроенных функций: можно использовать функции PV (или ПС), PMT (или ПЛТ), RATE (или СТАВКА), NPER (или КПЕР) электронных таблиц MS Excel и ее клонов. Решите с помощью встроенных функций все примеры из табл. 3.4.1 упражнения 3.4.1. Не забудьте при этом, что общее количество периодов в этих примерах равно mn, а процентная ставка за период равна i / m.

3.5. Непосредственный расчет ссуд

Разберем еще один способ отыскания параметра n при расчете ссуд. Этот способ полезен тем, что он предоставляет способ проверки решений для самых разных задач, возникающих при расчете ссуд.

Для реализации этого способа нам потребуется лист книги Microsoft Excel, по крайней мере, часть его. Рассмотрим следующий пример (табл. 3.5.1), взятый из упражнения 3.4.1.

Таблица 3.5.1

P	R	i, %	m	n
4000	1207	16	2	

Численно-аналитически и с помощью встроенной функции найдем значение n, приближенно равное двум. На рис. 3.5.1 в поле формул и в ячейке F3 видно решение задачи с помощью встроенной функции.

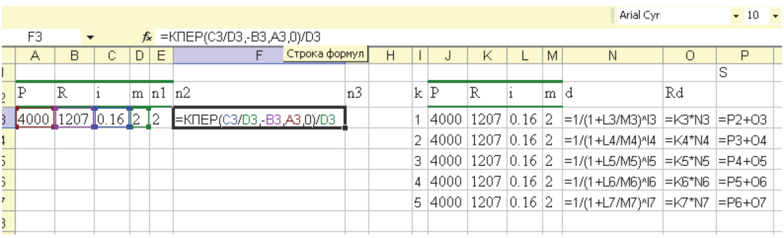


Рис. 3.5.1

Для решения третьим способом разместим в столбце I значения счетчика выплат k, в столбцах J, K, L, M – неизменные значения величины ссуды *P*, выплаты *R*, номинальной ставки *i*, числа *m* выплат в году; в столбцах же N, O, P, соответственно, – формулы для вычисления при последовательных значениях счетчика *k* следующих величин: дисконтирующего множителя *d*, приведенной к начальному моменту времени выплаты *Rd*, суммы *S* приведенных начальному моменту времени выплат на момент *k*. Соответствующие формулы приведены на рис. 3.5.1. Заголовок *S* вынесен на строку вверх во избежание появления ненужных вопросов и их обсуждения. Значения *P, R, i,* и формулы для *d, Rd, S* следует набирать единожды каждую, а затем копировать (протаскивать). Будем увеличивать протаскиванием количество *k* выплат и соответствующих строк, пока вычисленное значение суммы *S* не превзойдет значения величины ссуды *P*. Получаем следующее (рис. 3.5.2):

G3 fx 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																S
2	P	R	i	m	n1	n2	n3		k	P	R	i	m	d	Rd	
3	4000	1207	16%	2	2	2	2		1	4000	1207	16%	2	0.925925926	1117.592593	1117.592593
4									2	4000	1207	16%	2	0.85733882	1034.807956	2152.400549
5									3	4000	1207	16%	2	0.793832241	958.1555149	3110.556064
6									4	4000	1207	16%	2	0.735029853	887.1810323	3997.737096
7									5	4000	1207	16%	2	0.680583197	821.4639188	4819.201015

Рис. 3.5.2

То есть сумма *S* приведенных к начальному моменту времени выплат на момент *k* стала при $k = 4$ приближенно равной величине ссуды *P*, а при $k = 5$ существенно ее превзошла. Поэтому значение $4 / 2 = 2$ принимается в качестве приближенного значения *n*. Разностью $4000 - 3997{,}73 = 2{,}27$ можно пренебречь. Банки в подобных случаях часто так и поступают.

Этот способ решения задачи естественно назвать «непосредственным расчетом», поскольку называть его «имитационным моделированием» было бы слишком громко, хотя, по сути, верно.

Упражнение 3.5.1. Проверьте «непосредственным расчетом» все ранее полученные решения примеров из упражнения 3.4.1.

Замечание 3.5.1. Метод «непосредственного расчета» можно реализовать несколько более элегантно, если использовать абсолютную адресацию в формулах Microsoft Excel. Для тех, кто забыл, что это такое, кратко напомним.

В формулах Microsoft Excel могут использоваться как абсолютные адреса ячеек (вида $A$1), так и относительные (вида A1); часто используются адреса вида $A1, A$1, сочетающие абсолютную и относительную адресацию. Все вышеуказанные адреса являются адресами одной и той же ячейки, а разница проявляется при копировании формул, содержащих различные виды адресации.

Для тех, кто еще не вспомнил суть дела, приведем следующее заклинание: ***«При копировании ячеек с формулами Microsoft Excel абсолютные адреса ячеек-аргументов в формулах сохраняются, а в относительных адресах ячеек-аргументов сохраняются смещения от ячейки-формулы до ячеек-аргументов. При перемещении ячеек с формулами Microsoft Excel все адреса в формулах сохраняются».***

Тем, кто еще не понял смысл абсолютной и относительной адресации, рекомендуем повторять это заклинание каждое утро и каждый вечер до достижения полного понимания. Для них же приводим пример на рис. 3.5.3.

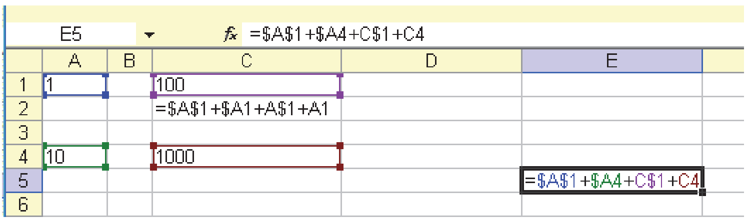


Рис. 3.5.3

Он получен копированием ячейки C2, содержащей формулу «=$A$1+$A1+A$1+A1», в ячейку E5. Значения в ячейки A1, A4, C1, C4 введены для наглядности. Результат виден на рис. 3.5.4.

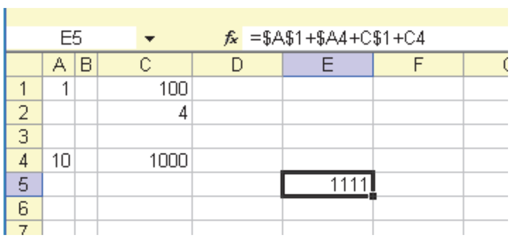


Рис. 3.5.4

Вернемся к расчету ссуд. Для того же примера (табл. 3.5.1) введем формулы, реализующие тот же расчет, но так, как это представлено на рис. 3.5.5. Формулы для *d, Rd, S* следует набирать единожды каждую, а затем копировать (протаскивать).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	P	R	i	m	n3		k	d	Rd	S
3	4000	1207	0.16	2			1	=1/(1+$C$3/$D$3)^G3	=$B$3*H3	=СУММ(I$3:I3)
4							2	=1/(1+$C$3/$D$3)^G4	=$B$3*H4	=СУММ(I$3:I4)
5							3	=1/(1+$C$3/$D$3)^G5	=$B$3*H5	=СУММ(I$3:I5)
6							4	=1/(1+$C$3/$D$3)^G6	=$B$3*H6	=СУММ(I$3:I6)
7							5	=1/(1+$C$3/$D$3)^G7	=$B$3*H7	=СУММ(I$3:I7)

Рис. 3.5.5

Действуя так же, как и ранее, будем увеличивать протаскиванием количество k выплат и соответствующих строк, пока вычисленное значение суммы S не превзойдет значения величины ссуды P. Получаем тот же результат (рис. 3.5.6).

E3 fx 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	P	R	i	m	n3		k	d	Rd	S	
3	4000	1207	16%	2	2		1	0.925925926	1117.592593	1117.592593	
4							2	0.85733882	1034.807956	2152.400549	
5							3	0.793832241	958.1555149	3110.556064	
6							4	0.735029853	887.1810323	3997.737096	
7							5	0.680583197	821.4639188	4819.201015	
8											

Рис. 3.5.6

3.6. Расчеты с помощью комбинации встроенной функции и «подбора параметра»

Еще один способ расчета параметров ссуд и других финансовых операций основан на применении встроенной функции и «подбора параметра». Применяется при этом не та функция, которая непосредственно рассчитывает нужный параметр ссуды или другой финансовой операции, а та, в которой данный параметр участвует как аргумент данной функции. Зачем это бывает нужно? Во-первых, в той ситуации, когда вы хотите использовать функцию, описание которой вам вполне понятно, во-вторых, для проверки (хотя тут нужно учитывать шанс сделать две однотипных ошибки), в-третьих, бывают ситуации, когда нет встроенной функции, позволяющей решить задачу без «подбора параметра». Решим следующий простой пример (табл. 3.6.1) для демонстрации метода.

Т а б л и ц а 3.6.1

P	*R*	*i*	*m*	*n*
4000	1207		2	2

Будем использовать для расчета процентной ставки *i* не предназначенную специально для этого встроенную функцию RATE (или СТАВКА), а функцию КПЕР (или NPER) электронных таблиц MS Excel и ее клонов. В ячейку под заголовком *n* поместим выражение *n* через другие параметры ссуды с помощью функции КПЕР(ставка;плт;пс;бс;тип) так, как это сделано на рис. 3.6.1 (ячейка E2 и поле формул).

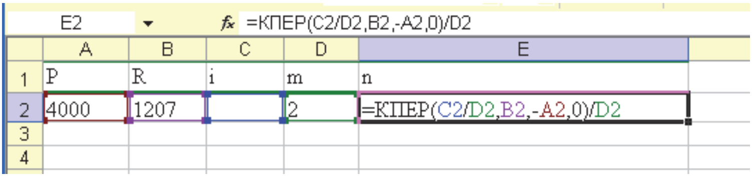


Рис. 3.6.1

Полученное изображено на рис. 3.6.2.

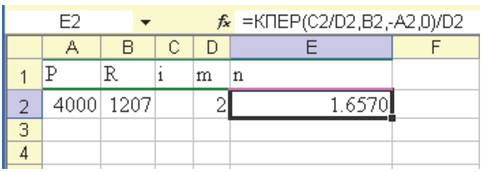


Рис. 3.6.2

Теперь вызываем средство «подбор параметра» и ищем значение ставки *i*, при котором значение *n* равно двум (рис. 3.6.3).

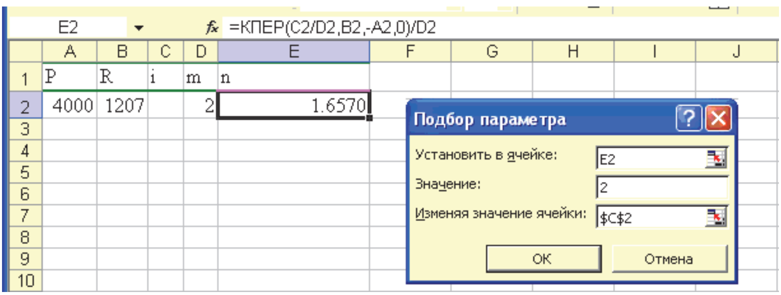
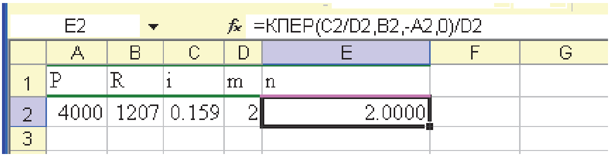


Рис. 3.6.3

Результат $i = 0{,}159$ виден на рис. 3.6.4.



E2 f_x =КПЕР(C2/D2,B2,-A2,0)/D2

	A	B	C	D	E	F	G
1	P	R	i	m	n		
2	4000	1207	0.159	2	2.0000		
3							

Рис. 3.6.4

Тот же приближенный результат дают и все другие способы решения этого примера.

Упражнение 3.6.1. Решите все примеры из табл. 3.4.1 (упражнение 3.4.1) с помощью каждой из встроенных функций PV (или ПС) PMT (или ПЛТ), RATE (или СТАВКА), NPER (или КПЕР) электронных таблиц MS Excel и ее клонов. Помните, что общее количество периодов в этих примерах равно *mn,* а процентная ставка за период равна i / m.

Упражнение 3.6.2. Для примеров из табл. 3.4.1 (упражнение 3.4.1), считая, что в столбце *i* заданы значения годовой номинальной процентной ставки-брутто, определите, является операция ссуды для каждого примера прибыльной для кредитора (заимодавца) или для заемщика относительно ценности денег – покупательной способности; рассмотрите случаи значений уровня инфляции а) h = 5 %, б) h = 10 %, в) h =15 %.

3.7. Расчеты характеристик инвестиционных проектов

Займемся теперь инвестиционными проектами.

Упражнение 3.7.1. Компания рассматривает 3 взаимоисключающих инвестиционных проекта. Структуры денежных потоков представлены в табл. 3.7.1. Ставка дисконтирования (т. е. процентная ставка) для всех проектов одинакова и равна M %. Определите *PV, NPV, PI, IRR, PBP* для этих проектов при конкретных значениях M и N. Какой проект Вы предпочтете, почему?

Таблица 3.7.1

Период	A	B	C
0	–N * 20 000	–(N/M) * 130 000	–M * 100 000
1	N * 15 000	(N/M) * 80 000	M * 90 000
2	N * 16 000	(N/M) * 60 000	M * 30 000
3	N * 17 000	(N/M) * 80 000	

Указание 3.7.1. Числа M и N задавайте сами, как в разделах 3.3 и 3.4.

Указание 3.7.2. Постарайтесь каждый показатель рассчитать двумя способами. Используйте финансовые функции ЧПС и ВСД, или PV и IRR электронной таблицы MS Excel и ее клонов. Внимательно прочтите справку по функции ЧПС (PV); без этого вы, скорее всего, сделаете ошибку, виновником которой будет Microsoft Corporation.

Упражнение 3.7.2. Определите в условиях упражнения 3.7.1, во сколько раз нужно увеличить доходы каждого из потоков за периоды 2,3, чтобы а) показатель IRR стал больше 60 %, б) чтобы показатель PI стал больше, чем 2?

Упражнение 3.7.3. Для каждого из проектов А, В, С определите в условиях табл. 3.7.1, при каких значениях процентной ставки r у проекта не существует срока окупаемости с учетом дисконтирования. Числа M и N задавайте сами, как в разделах 3.3 и 3.4.

Упражнение 3.7.4. Для каждого из проектов А, В, С определите в условиях табл. 3.7.1 модифицированную внутреннюю доходность проекта *MIRR*, считая, что r-ставка, по которой происходит финансирование проекта, равна M % ,а v-ставка, по которой возможно реинвестирование, равна N %. Числа M и N задавайте сами, как в разделах 3.3 и 3.4.

Указание 3.7.3. Для расчета примените формулу (2.3.14) или встроенную функцию *MIRR* (*МВСД*).

Упражнение 3.7.5. Пусть в условиях упражнения 3.7.3 данные указаны без учета инфляции. Рассчитайте значения потоков платежей и характеристик проектов при переменном уровне инфляции h, $h(1) = 15$ %, $h(2) = 10$ %, $h(3) = 5$ % в период (год).

Упражнение 3.7.6. Выведите приближенную формулу, связывающую изменение Δr процентной ставки r, и соответствующее изменение ΔNPV чистого приведенного дохода NPV инвестиционного проекта. Проверьте формулу непосредственным расчетом NPV при различных значениях r на данных из табл. 3.7.1

Упражнение 3.7.7. Компания рассматривает набор инвестиционных проектов, предварительные результаты анализа которых приведены в табл. 3.7.2.

Таблица 3.7.2

Проект	Затраты	NPV
A	M * 22000	N * 9000
B	M * 16000	N * 7000
C	M * 12000	N * 5500
D	M * 10000	N * 5000
E	M * 8000	N * 4500
F	M * 7500	N * 3500
G	M * 7000	N * 2500
H	M * 4000	N * 2900

Инвестиционный бюджет фирмы равен (N/M) * 500 00. Предполагается, что проекты C, D, E, F, G, H не поддаются дроблению и проекты C и D взаимоисключающие. Используя линейное программирование (Поиск решения, или Solver в MS Excel и Решатель в LibreOffice.org Calc), найдите оптимальный инвестиционный портфель для фирмы по критерию NPV. Можно ли в данном случае найти оптимальный инвестиционный портфель по критерию NPV устно?

3.8. Расчеты по облигациям

Ограничимся несколькими упражнениями.

Упражнение 3.8.1. Для облигации со сроком погашения 7 лет, ежегодным купонным платежом 150 р., ценой покупки 1050 р. и ценой погашения 1000 р. рассчитайте доходность к погашению i.

Указание 3.8.1. Решите задачу двумя способами. Используйте формулу (2.4.1) или (1.8.1) для решения «по определению»; для решения с помощью встроенных финансовых функций MS Excel или ее клона используйте, например, функции RATE, или СТАВКА.

Упражнение 3.8.2. Какие еще встроенные финансовые функций MS Excel или ее клонов можно использовать для решения задачи из упражнения 3.8.1?

Упражнение 3.8.3. Для облигации со сроком погашения 5 лет, купонным платежом 100 р. раз в полгода, ценой покупки 1100 р. и ценой погашения 1000 р. рассчитайте доходность к погашению i.

Упражнение 3.8.4. Для облигации со сроком погашения 7 лет, ежегодным купонным платежом 150 р., ценой покупки 1050 р. и ценой погашения 1000 р. рассчитайте дюрацию при рыночной годовой процентной ставке 10 %.

Указание 3.8.4. Решите задачу двумя способами. Используйте формулу (2.4.10) для решения «по определению»; для решения с помощью встроенных финансовых функций MS Excel или ее клона используйте функции ДЛИТ, или DURATION. Кстати, «duration» по-английски значит «длительность».

Упражнение 3.8.5. Для облигации со сроком погашения 5 лет, купонным платежом 100 р. раз в полгода, ценой покупки 1100 р. и ценой погашения 1000 р. Рассчитайте дюрацию при рыночной годовой процентной ставке 8 % .

Упражнение 3.8.6. Какие еще встроенные финансовые функции MS Excel или ее клонов можно использовать для расчетов, связанных с облигациями?

Отметим, что расчеты по облигациям с использованием встроенных финансовых функций MS Excel имеют свою специфику, с которой приходится считаться. Эта специфика усугубляется низким качеством переводов соответствующего раздела Help (Справки) программы MS Excel и ее клонов.

Для желающих вникнуть в расчеты по облигациям посоветуем следующую книгу: *Лукасевич И. Я.* Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений : учеб. пособие. – М. : Финансы, ЮНИТИ, 1998. – 400 с.

3.9. Финансовый пакет в программе wxMaxima

С 2015 г. в состав программы wxMaxima включен финансовый пакет Finance Package. Ввиду бесплатности и общедоступности программы wxMaxima скажем несколько слов о ее финансовом пакете.

Как до него добраться? Запустите программу wxMaxima, и из пункта меню «Help», что в строке меню, выберите в выпадающем списке пункт «Maxima help» (примерно второй в списке). В открывшемся окне «Maxima manual» перейдите на вкладку «Содержание». Передвигаясь по дереву «Содержания» вниз, спустимся примерно чуть ниже середины дерева, где и обнаружим иконку с названием «finance» в виде книжки. Щелчок по иконке приведет к появлению в правой части окна «Maxima manual» справки пакета Finance (на английском языке). Из правой части окна «Maxima manual» можно копировать нужные команды в окно программы wxMaxima, редактируя их в меру необходимости, а затем исполняя. Начать следует с загрузки пакета Finance командой **load(finance)$.**

Одной загрузки пакета Finance на сеанс работы программы wxMaxima вполне достаточно.

Начать рекомендуем с команды **graph_flow,** выполнив **graph_flow([-5000,-3000,800,1300,1500,2000])$** и дождавшись появления картинки (рис. 3.9.1) в отдельном окне gnuplot graph. Копировать из справки «бортовые номера» команд не следует, равно как и загружать пакет Finance повторно.

Затем стоит познакомиться с командами **fv**(*rate,PV,num*) и **pv**(*rate,FV,num*). Смысл их, впрочем, не вполне совпадает с общепринятым, а основан на модели вклада. После можно разобраться в командах **annuity_pv**(*rate,FV,num*), **annuity_fv**(*rate,FV,num*), связанных с понятием аннуитета. Полезно познакомиться с командой **saving**(*rate,amount,num*), относящейся к модели периодически пополняемого вклада, аналогичной модели выплачиваемого периодически кредита.

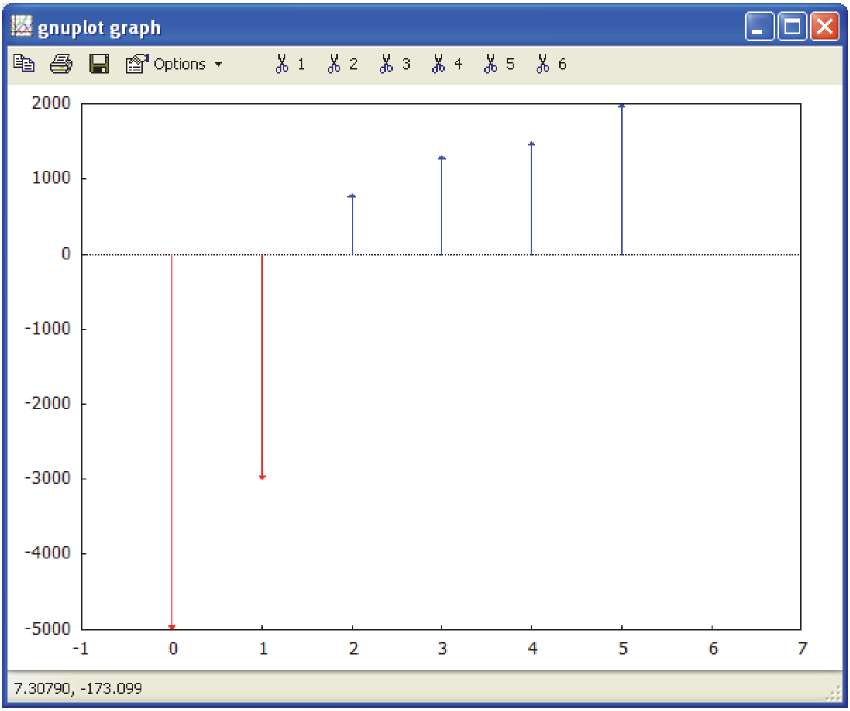


Рис. 3.9.1. График потока платежей

Вполне понятны и полезны команды **npv**(*rate,val*), **irr**(*val,IO*), **benefit_cost**(*rate,input,output*), хотя смысл примера к **irr** не очевиден. С моделями, используемыми в командах **days360, geo_annuity_pv, geo_annuity_fv, amortization, arit_amortization, geo_amortization,** мы в нашем пособии не встречались; наверняка эти модели и команды кому-нибудь нужны.

И это пока все, впрочем, мы говорим о пакете Finance версии 0.1, т. е. версии первой и пока последней.

Упражнение 3.9.1. Выполните все команды, указанные в справке по пакету Finance.

Упражнение 3.9.2. С помощью команд **fv**(*rate,PV,num*), **pv**(*rate,FV,num*), **annuity_pv**(*rate,FV,num*), **annuity_fv**(*rate,FV,num*), **saving**(*rate,amount,num*), решите в программе wxMaxima все примеры из упражнения 3.4.1 (табл. 3.4.1), полагая всюду $m = 1$.

Упражнение 3.9.3. Выполните предыдущее упражнение 3.9.2, задавая всюду m, как в табл. 3.4.1.

Упражнение 3.9.4. Какие задачи из упражнений разделов 3.3–3.7 можно выполнить в программе wxMaxima с помощью команд пакета Finance?

Упражнение 3.9.5. Насколько пакет Finance может быть полезен для расчетов по облигациям из раздела 3.8?

3.10. Некоторые финансовые возможности программы Mathematica

Основные «финансовые возможности» программы Mathematica связаны со стохастической финансовой математикой. Однако и для задач классической финансовой математики программа Mathematica может многое. Приведем некоторые простейшие примеры.

Итак, команда **TimeValue[s,i,t]** вычисляет значение стоимости актива s, приведенное к моменту времени t для процентной ставки i. Вместо подробного описания ее возможностей и синтаксиса посмотрим простейшие примеры:

1) вычисление будущего значения платежа с настоящим значением $1000 при эффективной процентной ставке 5 % через 3 периода начисления:

In[1]:=TimeValue[1000, 0.05, 3]
Out[1]=1157.63

2) вычисление дисконтированного на 3 периода начисления назад значения платежа с настоящим значением $1000 при эффективной процентной ставке 5 %:

In[1]:=TimeValue[1000, 0.05, -3]
Out[1]=863.838

3) **TimeValue** работает с символическими параметрами:

In[1]:=TimeValue[amount, rate, periods]
Out[1]=$\mathbf{amount(1+rate)^{periods}}$

4) вычисление будущего значения для инвестированной 1-го января 2010 г. на 3 года величины $1000 при эффективной ставке 7,5 %:

In[1]:=TimeValue[1000, .075, {{2013, 1, 1}, {2010, 1, 1}}]
Out[1]=1242.3

5) вычисление будущего значения для инвестированной на 5 периодов величины $1000 при условии, что ставка своя для каждого периода (конкретно 0,04, 0,05, 0,06, 0,07, 0,08):

In[1]:=TimeValue[1000, {.04, .05, .06, .07, .08}, 5]
Out[1]=1337.63

6) вычисление приведенной к моменту 0 (дисконтированной) выплаченной в момент 10 величины $1000 при условии, что ставка зависит от

периода (конкретно 0,02 для 1-го периода, 0,05 для 2-го, 3-го, 4-го периодов, 0,06 для 5-го, 6-го, 7-го, 8-го, 9-го периодов, 0,08 для 10-го периода):

In[1]:=TimeValue[1000, {1 -> .02, 2 -> .025, 5 -> .04, 10 -> .055}, {0, 10}]

Out[1]=585.431

7) вычисление будущего значения с символическими параметрами и переменной ставкой:

In[1]:=TimeValue[am, {r1, r2, r3, r4, r5}, 5]

Out[1]=am(1 + r1) (1 + r2) (1 + r3) (1 + r4) (1 + r5)

8) вычисление числа периодов *n* с символическими параметрами с использованием команды Solve:

In[1]:=Solve[TimeValue[amount, rate, n] == presentvalue, n]

Out[1]= $$\left\{\left\{n \to \frac{\text{Log}\left[\frac{\text{presentvalue}}{\text{amount}}\right]}{\text{Log}[1 + \text{rate}]}\right\}\right\}$$

Для работы с потоками платежей используется команда **Cashflow**, для работы с аннуитетами постнумерандо и пренумерандо – команды **annuity** и **annuity_due**, для преобразований процентных ставок – команда **EffectiveInterest**. Финансовые команды особенно эффективны при их совместном использовании друг с другом и с другими командами программы Mathematica. Например, вот так вычисляется с символическими параметрами платеж по ссуде (рис. 3.10.2):

In[1]:= **Solve[TimeValue[Annuity[payment, n, 1 / f], r, n] == val, payment]**

Out[1]= $$\left\{\left\{\text{payment} \to \frac{\left(-1+(1+r)^{\frac{1}{f}}\right)\text{val}}{-1+\left((1+r)^{\frac{1}{f}}\right)^{f n}}\right\}\right\}$$

Рис. 3.10.2

В общем, можно сосчитать то, что мы с вами считали в Microsoft Excel, и еще много чего, особенно в символьной форме. Содержательные примеры для финансовых и других команд программы Mathematica см. на сайте http://reference.wolfram.com

3.11. О некоторых продуктах фирмы Wolfram Research

Помимо своего флагманского продукта – программы Mathematica – фирма Wolfram Research выпускает ряд других продуктов, которые могут быть полезны для анализа и решения задач финансовой математики.

Отметим Mathematica Link for Excel для обеспечения обмена данными программы Mathematica с MS Excel.

Программа финансового анализа Wolfram Finance Platform предоставляет большое количество аналитических моделей, методов оптимизации, временных рядов, вероятностных распределений и т. д. Также она позволяет непосредственно в реальном времени обрабатывать финансовую информацию агентства Bloomberg и проводить высокопроизводительные вычисления. В продолжении настоящего пособия, посвященного компьютерным технологиям в задачах стохастической финансовой математики, предполагается подробнее познакомить читателей с программой Wolfram Finance Platform.

Стоит упомянуть WolframAlpha – процессор знаний, который по вашему запросу предоставляет данные об окружающем мире в числах и графиках. Он доступен онлайн, в нем есть такие разделы, как «Математика» (еще бы!), «Статистика и анализ данных», «Деньги и финансы» и многие другие. В разделе «Деньги и финансы» можно вычислить кое-что, относящееся к классической финансовой математике (скажем, настоящее и будущее значения потока платежей), и кое-что, относящееся к стохастической финансовой математике

Существует платная версия процессора – Wolfram Alpha Pro, предоставляющая больше возможностей, и версия Wolfram Alpha Pro Premium, предоставляющая еще больше возможностей. Последней обязано своим появлением следующее упражнение:

Упражнение 3.11.1. Версия Wolfram Alpha Pro Premium может быть оплачена так: $9,99 в месяц для оплативших год сразу, или $12 в месяц для платящих помесячно. Вычислите оценку внутренней доходности фирмы Wolfram Research, считая, что платящие помесячно всегда платят за каждый из двенадцати месяцев.

Упражнение 3.11.2. Проведите аналогичные расчеты для схем оплаты со скидками для студентов и преподавателей. Данные разыщите сами.

Стоит отметить, что WolframAlpha способен проявлять как блестящие способности, особенно в математике, так и редкую тупость (убедитесь сами!).

В интернете можно найти большое количество материалов по WolframAlpha, в том числе на русском языке. Отметим комментарий на одном из форумов: «проблема в том что wolfram решает совершенно не так как у нас в техникуме :(».

Кейсы из практики финансового директора*

Вниманию читателей предлагаются задачи – кейсы (случаи из практики). Их предложил В. С. Сотников, финансист с большим опытом работы в банках и в качестве финансового директора достаточно крупных компаний.

Задачи эти интересны тем, что, во-первых, имеют отношение к финансовой математике, во-вторых, тем, что для их решения недостаточно (а может быть, и необязательно) проработать материал теоретических разделов, а в-третьих, тем, что в них не обойтись без правильной постановки задачи (о чем речь – что надо – как можно).

Каждую из задач можно решать на нескольких уровнях: 1) указать, каких исходных данных не хватает для решения; 2) решить задачу при каких-то конкретных значениях данных, более-менее соответствующих реальной жизни; 3) указать решения задачи для различных вариантов исходных данных, а также указать характер зависимости решения от исходных данных; 4) выяснить, какие обусловленные реальной жизнью нюансы и возможности есть в задаче.

На каждом из уровней польза от работы с этими задачами несомненна, по крайней мере, для тех, кому интересно и важно, как теория соотносится с практикой.

1. По условиям договора за купленный товар надо заплатить 30 % стоимости товара через 1,5 месяца, а 70 % – через 8 месяцев. Цена за единицу товара составляет 690 руб. (в том числе НДС 18 %). Можно заплатить немедленно, тогда цена за единицу составит 570 руб. (в том числе НДС 18 %). Какой вариант выгоднее? Нужны ли еще данные для оценки выгоды и какие? Тот же вопрос – при ценах 480 и 455 руб., соответственно (в том числе НДС 18 %).

2. По валютному контракту оплата за импорт товара составляет сумму 3 млн долларов. Уже оплачено 20 % этой суммы, по первоначальному графику следует оплатить еще 20 % через 2–4 дня, 40 % через 1,5 месяца и 20 % через 8,5 месяца. Поставщик сделал следующее предложение: если платим по графику – будет премия 15 % от оставшейся суммы (т. е. от 80 %), если платим все сразу и сейчас – 25 % от оставшейся суммы (начисленную сумму премии можно просто недоплачивать – в счет долга), плюс 150 тыс. долларов – премия за досрочную оплату. Насколько предложение выгодно – с чем сравнить и как, что из факторов учесть, какие еще нужны данные?

---

* Автор – В. С. Сотников.

3. Физическое лицо – работник фирмы – договорился с руководством фирмы о предоставлении юридическим лицом (фирмой) займа физическому лицу (работнику). Если юридическое лицо выдает заем физическому лицу, то юридическое лицо платит 20 % налога на прибыль с полученной суммы процентов по займу. При этом если проценты по займу ниже 2/3 ставки рефинансирования ЦБ РФ (скажем, 8,25 %), то с разницы (5,5 % годовых – проценты по займу), умноженной на сумму займа и исчисленной за период пользования, физическое лицо платит НДФЛ с материальной выгоды величиной 35 %. Какой вариант займа должны выбрать работник и руководство фирмы, рационально стремясь к обоюдной выгоде?

4. Срок оплаты по контракту 15.10.2015. Если покупатель гасит весь долг до 15.07.2015 – покупатель получает от продавца премию 7 % от всей суммы долга, если платеж до 15.03.15 – премия 11 % от всей суммы долга. Пусть сейчас 15.01.2015. Насколько выгодно предложение:

а) если премия от всей суммы долга возвращается после его погашения;

б) если весь долг гасится путем зачета премии (те она просто недоплачивается при погашении);

в) те же вопросы, если премия начисляется от суммы долга за вычетом из него НДС (18 %).

А что получится, если теперь посчитать при этих же условиях следующие варианты:

а) у владельца-учредителя есть заем от предприятия под 2/3 ставки рефинансирования ЦБ РФ (так что без НДФЛ с материальной выгоды), и он его разместил в банке во вклад под 15 % годовых (вклад можно отозвать без потери процентов);

б) можно привлечь банковский кредит под 17 % годовых;

в) что, если посчитать выгоду не для предприятия, а для его учредителя («до кармана» – с учетом НДФЛ с дивидендов).

5. Через 5,5 месяцев предстоит выплатить некую сумму в долларах. Текущий курс валюты 51,78 руб./долл. Что выгоднее: покупать сейчас или заключить форвард-контракт на покупку долларов по 54,68 руб./долл. со сроком исполнения через 5,5 месяцев и оплатой по факту покупки?

В чем разница в ситуациях для физического лица и юридического лица?

6. Фирма-поставщик предлагает вашей фирме на 3 мес. РАНЕЕ оплатить поставку товара, и ТОГДА цена будет снижена – например, с 7300 до 6900 руб. за единицу товара. Как посчитать эффект? Следует ли принимать предложение?

7. Фирмой куплены 500 тыс. евро 15 дней назад по 69 руб.; теперь курс 69,30 руб. и ожидается, что темп роста сохранится на месяц. У фирмы имеется долг по кредиту в рублях на бо́льшую сумму, чем потрачено на евро; кредит получен в рамках возобновляемой кредитной линии по 10,9 % годовых, причем плата за лимит 0,65 % годовых (т. е. при нулевом долге плата составляет 0,65 % годовых от суммы лимита, если кредитную линию НЕ закрывать). Сто́ит ли фирме продать валюту и погасить кредит – хотя бы часть и временно?

8. Тёща дала 150 тыс. руб. зятю, который будет пожизненно отдавать ей 1 тыс. руб. ежемесячно плюс 3 тыс. руб. в конце каждого года. Выгоднее ли такой доход, чем возобновляемый банковский вклад под 10 % годовых, если полученные от зятя средства СРАЗУ используются на бытовые нужды, инфляция по которым 12 % в год, а проценты по вкладу используются на те же бытовые нужды ежегодно по получении процентов?

Литературные указания

Существует масса изданий по финансовой математике. Список некоторых из них приведен ниже. В нем отсутствуют книги, посвященные преимущественно стохастической финансовой математике, поскольку мы пока ее не касались.

Какую книгу выбрать для дальнейшего чтения и освоения? Это вопрос сугубо индивидуальный. Отметим следующее: если вам предстоит профессионально заниматься «задачами в условиях определенности» (кредиты, депозиты и т. д.), то стоит познакомиться с книгами Е. М. Четыркина, поскольку в них рассмотрено большое количество возникающих на практике вариантов задач. А если вы предполагаете использовать встроенные финансовые функции MS Excel, то нужно плотно работать со справкой MS Excel.

Литература

1. *Четыркин Е. М.* Финансовая математика / Е. М. Четыркин. – 6-е изд. – М. : Дело, 2006. – 400 с.

2. *Четыркин Е. М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов / Е. М. Четыркин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Дело Лтд, 1995. – 320 с.

3. *Четыркин Е. М.* Финансовый анализ производственных инвестиций / Е. М. Четыркин. – М. : Дело, 1998. – 256 с.

4. *Малыхин В. И.* Финансовая математика : учеб. пособие / В. И. Малыхин. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 237 с.

5. *Капитоненко В. В*. Финансовая математика и ее приложения / В. В. Капитоненко. – М. : Приор, 1998. – 144 с.

6. *Башарин Г. П.* Начала финансовой математики / Г. П. Башарин. – М. : ИНФРА-М, 1998. – 160 с.

7. *Кочович Е.* Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов : [пер. с серб.] / Е. Кочович. – М. : Финансы и статистика, 1994. – 268 с.

8. *Мелкумов Я. С.* Финансовые вычисления. Теория и практика : учеб.-справ. пособие / Я. С. Мелкумов. – М. : ИНФРА-М, 2002. – 383 с.

9. *Лукашин Ю. П.* Финансовая математика : учеб. пособие / Ю. П. Лукашин. – М. : МЭСИ, 2007. – 183 с.

10. *Лукасевич И. Я.* Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений : учеб. пособие / И. Я. Лукасевич. – М. : Финансы, ЮНИТИ, 1998. – 400 с.

11. Финансовая математика : Математическое моделирование финансовых операций : учеб. пособие / под ред. В. А. Половникова и А. И. Пилипенко. – М. : Вузовский учебник, 2004. – 360 с.

12. *Ковалев В. В.* Курс финансовых вычислений / В. В. Ковалев, В. А. Уланов. – М. : Финансы и статистика, 1999. – 328 с.

13. *Ковалев В. В.* Сборник задач по финансовому анализу / В. В. Ковалев. – М. : Финансы и статистика, 1997. – 128 с.

14. *Липсиц И. В.* Инвестиционный проект : методы подготовки и анализа : учеб.-справ. пособие / И. В. Липсиц, В. В. Косов. – М. : Бек, 1996. – 304 с.

15. *Новиков А. И.* Теория принятия решений в управлении рисками в финансовой и налоговой сферах : учеб. пособие / А. И. Новиков, Т. И. Солодкая. – М. : Дашков и К°, 2015. – 288 с.

16. Компьютерные технологии в финансовой математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 1 / сост. Я. А. Израилевич ; Воронежский государственный университет. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. – Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m16-68.pdf

У ч е б н о е и з д а н и е

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В ЗАДАЧАХ КЛАССИЧЕСКОЙ
ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Часть I

Учебно-методическое пособие

Составитель
Яков Аронович Израилевич

Редактор *Е. В. Пономарева*

Подписано в печать 13.11.2017. Формат 60×84/16
Уч.-изд. л. 6,3. Заказ 227

Издательский дом ВГУ
394018 Воронеж, пл. Ленина, 10